УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ" - ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

ISSN:1857-8691

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2015
YEARBOOK
2015

ГОДИНА 4 VOLUME IV

GOCE DELCEV UNIVERSITY - STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2015
YEARBOOK
2015

ГОДИНА 4 АВГУСТ, 2015 VOLUME IV

GOCE DELCEV UNIVERSITY – STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА
YEARBOOK
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

За издавачот:
Проф д-р Цвета Мартиновска Банде

Редакција и администрација	**Address of the editorial office**
Универзитет „Гоце Делчев“-Штип	Goce Delcev University – Stip
Факултет за информатика	Faculty of Computer Science
ул. „Крсте Мисирков“ 10-А	Krste Misirkov 10-A
п. фах 201, 2000 Штип	PO box 201, 2000 Štip,
Р. Македонија	R. of Macedonia

С О Д Р Ж И Н А

АНАЛИЗА НА ОДНЕСУВАЊЕТО НА ЕДНО КВАДРАТНО ПРЕСЛИКУВАЊЕ КАКО ДИСКРЕТЕН ДИНАМИЧКИ СИСТЕМ

Билјана Златановска

Факултет за информатика, Универзитет “Гоце Делчев”, Штип
biljana.zlatanovska@ugd.edu.mk

Апстракт. Во овој труд го анализираме квадратното пресликување $f(x)=1 \quad Ax^2$ кое зависи од еден реален параметар A и за различна реална вредност на параметарот A ова пресликување дава еднопараметрска фамилија на функции. Анализата ќе биде направена од аспект на диференцната равенка $x_{n+1}=f(x_n)$, разгледувана како дискретен динамички систем. Анализирањето на динамиката на еден ваков систем во суштина е анализирање и класификација на стабилноста на неподвижните точки, постоење на орбити, како и анализа на бифуркационен дијаграм. Графичките презентации ќе бидат изработени во математичкиот пакет Mathematica.

Клучни зборови: Квадратно пресликување, дискретен динамички систем, еднопараметрска фамилија на функции, неподвижни точки, орбити, бифуркационен дијаграм.

1. Вовед

Ќе спроведеме анализа на квадратното пресликување $f(x)=1 \quad Ax^2$ за A реален параметар. Квадратното пресликување $f(x)=1 \quad Ax^2$ ќе го разгледаме од аспект на диференцна равенка $x_{n+1}=f(x_n)$, разгледувана како дискретен динамички систем. Анализирањето на динамиката на еден ваков систем во суштина е анализирање и класификација на стабилноста на нејзините неподвижни точки, анализирање на орбитите, а посебно анализа на неговиот бифуркационен дијаграм во зависност од менувањето на реалниот параметарот *A*. Овие анализи ни даваат слика за однесувањето на пресликувањето $f(x)=1 \quad Ax^2$ со менување на параметарот *A*. Дијаграмите се направени со користење на компјутер и на математичкиот пакет Mathematica.

Вакви анализи за логистичкото пресликување како квадратно пресликување, како и за други квадратни пресликувања кои зависат од еден параметар не се нови и можат да се видат и во математичката литература како што се [1], [2], [3], [4], [5], [6], [13]. Кодовите за цртање на дијаграмите на логистичкото пресликување, како и на други реални пресликувања зависни од една променлива со Mathematica можат да се видат во математичката литература [3], [4], [9], [15].

Добро е да се напомене дека квадратните пресликувања наоѓаат широка примена, особено Логистичкото пресликување дадена во многу трудови, меѓу кои се и [10], [11], [12].

2. Теоретски основи

Со оглед на тоа што ќе анализираме однесување на дискретен динамички систем во неподвижни точки, анализа на орбити и анализа на бифуркационен дијаграм во продолжение ќе дадеме дефиниции за овие поими, кои можат да се најдат во математичката литература [1], [3], [6], [7], [8].

Квадратното пресликување $f(x)=1 \quad Ax^2$, *A* - реален параметар го разгледуваме како диференцна (рекурентна) равенка $x_{n+1}=f(x_n)$ каде $f: R \quad R$ е пресликување и анализираме каде се пресликува точка или подмножество од R итеративно со *f*. Вака разгледуваната диференцна равенка $x_{n+1}=1 \quad Ax_n^2$ дефинира дискретен динамички систем (R,f) со динамика $f^n, n \quad N_0$ дадена со итерациите на пресликувањето *f*.

Каде се пресликува точка x од реалното множество *R* итеративно со f во суштина е следење на така наречена траекторија на *f* со почеток во таа точка x.

Траекторија на f со почеток во $x \quad R$ е низата

$$x=x_0=f^0(x), x_1=f(x_0), x_2=f(x_1)=f^2(x_0), \ldots, x_{n+1}=f(x_n)=f^{n+1}(x_0), \ldots$$

Множеството од сите слики $f^n(x)$ на x итеративно со *f* е орбита на точката x и се означува со

$$orb(x)=\{y \mid y=f^n(x), n \quad N_0\}.$$

Орбитата на $x_0 = 0.4$ за квадратното пресликување $f(x) = 1 - 2x^2$, каде реалниот параметар *A*=2 е следнава низа,

$x_0 = 0.4$

$x_1 = f(x_0) = f(0.4) = 1 - 2 \cdot 0.4^2 = 0.68$

$x_2 = f(x_1) = f(0.68) = 1 - 2 \cdot 0.68^2 = 0{,}0752$

$x_3 = 0{,}9868992$

$x_4 = -0{,}9737984$

$x_5 = -0{,}89656664768512,$

$x_6 = -0.607663507482668$

$x_7 = 0{,}26149012334772298$

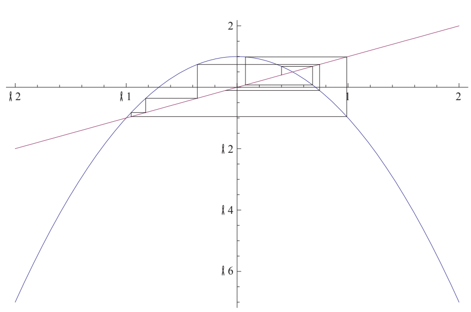
$x_8 = 0{,}8632458307831852425$

итн.

Орбитата со почеток во точката $x_0 = 0.4$ за квадратното пресликување $f(x) = 1 - 2x^2$ до x_8 со код

```
qvad[A_]:= Function[x, 1 − 2 * x^2];
Orbit[map_, x0_, n_]: = NestList[map, 0.4,8];
IterativeProcess[map_, x0_, {min_, max_}]: =
Module[{fr, orb}, orb = Orbit[map, 0.2,8];
fr = MapThread[Line[{{#1, #1}, {#1, #2}, {#2, #2}}]&,
{Drop[orb, −1], Drop[orb, 1]}];
Show[Plot[{map[x], x}, {x, −2,2}], Graphics[{fr}]]]
t3 = Show[GraphicsArray[{IterativeProcess
[qvad[2],0.4, {0,2}]}]]
```

согласно [9] применет за конкретното пресликување е дадена на слика 1,



Слика 1. $f(x) = 1 - 2x^2$ **и** $x_0 = 0.4$

За дискретен динамички систем (*X*,*R*) дефиниран со диференцна равенка $x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x)$ точката $x \in R$ се вика неподвижна точка за пресликувањето *f* ако $f(x) = x$ т.е $orb(x) = \{x\}$. Неподвижната точка x може да се појави како привлечна точка (атрактор или стабилна точка) или како одбивна точка (репелер или нестабилна точка) во зависност од првиот извод на функцијата во таа точка *x* т.е

1. Ако $|f'(x)| > 1$ тогаш *x* е нестабилна неподвижна точка;

2. Ако $|f'(x)| < 1$ тогаш *x* е стабилна неподвижна точка;

3. Ако $|f'(x)| = 1$ тогаш *x* е неутрална неподвижна точка.

За дискретен динамички систем (*X*,*R*) дефиниран со диференцна равенка $x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x)$ точката $x \quad R$ се вика периодична точка за *f* ако постои природен број *n>1* т.ш $f^n(x) = x, f^{n \quad 1}(x) \quad x$. Најмалиот природен број *n* со ова својство се вика период на *x*. Орбитата на точката *x* има точно *n* точки и се вика периодична орбита.

Првиот чекор во класификацијата на динамиката на едно пресликување зависно од параметар е претставување на промените кои се добиваат со промена на параметарот. Како алатка за анализа на овие промени ни служат бифуркационите дијаграми кои обично се користат во нелинеарната динамика. Бифуркационите дијаграми прикажуваат некои карактеристични својства на асимтотското решение т.е каде се случуваат негови квалитативни промени со промена на параметарот на динамичкиот систем разгледан како функција која зависи од параметар. Ваквите промени се нарекуваат бифуркации.

Согласно цитираната литература во натамошниот текст даваме анализира на квадратното пресликување $f(x) = 1 \quad Ax^2$ за *A* реален параметар.

3. Неподвижни точки на пресликувањето $f(x) = 1 \quad Ax^2$

Квадратното пресликување $f(x) = 1 \quad Ax^2$, каде *A* е реален параметар е еднопараметарска фамилија на пресликувања. Нека функција од таа еднопараметарска фамилија ја обележиме со g_A. Ќе се обидеме да ја разгледаме динамиката на g_A со промена на реалниот параметар *A*. За $g_A(x) = 1 \quad Ax^2$ ги наоѓаме неподвижните точки со $g_A(x) = x$ т.е

$$x_+ = \frac{1+\sqrt{1+4A}}{2A}, x \quad = \frac{1 \quad \sqrt{1+4A}}{2A} \qquad (1)$$

За $1+4A \quad 0 \quad A \quad \frac{1}{4}$, x_+, x се реални корени. Да го разгледаме однесувањето на x_+, x дадени со (1) при менување на реалниот параметар *A*.

Класификацијата на стабилноста на неподвижните точки дадени со (1) ја испитуваме со првиот извод на g_A. Првиот извод на $g_A(x) = 1 \quad Ax^2$ е $g_A(x) = \quad 2Ax$ и неговата апсолутна вредност во неподвижните точки (1) е $\left|g_A(x_+)\right| = \left|1 \quad \sqrt{1+4A}\right|, \left|g_A(x \quad)\right| = \left|1+\sqrt{1+4A}\right|$.

За $\left|g_A(x \quad)\right| = \left|1+\sqrt{1+4A}\right| > 1$ точката x дадена со (1) е нестабилна неподвижна точка (репелер).

За $\left|g_A(x_+)\right| < 1$ добиваме дека x_+ дадена со (1) е стабилна неподвижна точка (атрактор) за $\frac{1}{4} < A < \frac{3}{4}$, бидејќи

$$1 < g_A(x_+) < 1$$
$$1 < 1 \quad \sqrt{1+4A} < 1$$
$$\frac{1}{4} < A < \frac{3}{4}$$

Значи, точката x_+ дадена со (1) е нестабилна неподвижна точка (репелер) т.е $\left|g_A(x_+)\right| > 1$ за $A > \frac{3}{4}$. За $A = \quad \frac{1}{4}$ точката $x_+ = 2 = x$ добиена од (1) е неутрална неподвижна точка од $\left|g_A(x_+)\right| = 1, \left|g_A(x \quad)\right| = 1$. Неподвижните точки x_+ и x дадени со (1) се орбити со период 1, $orb(x_+) = \{x_+\}$ и $orb(x \quad) = \{x \quad\}$.

4. Периодични орбити за пресликувањето $f(x)=1-Ax^2$

Да го разгледаме однесувањето на $g_A(x)=1-Ax^2$ за $A>\frac{3}{4}$. За $g_A^{\,2}(x)=x$ ги наоѓаме 2-циклусите (периодични орбити со период 2) кои се добиваат како

$$g_A^{\,2}(x)=x \quad\Leftrightarrow\quad -A^3x^4+2A^2x^2-A+1=x$$

Од

$$\frac{-A^3x^4+2A^2x^2-x-A+1}{-Ax^2-x+1}=A^2x^2-Ax-(A-1)$$

се добива дека освен неподвижните точки x_+, x_- дадени со (1) како решенија на $g_A^{\,2}(x)=x$ се добиваат и две нови точки

$$y_+=\frac{1+\sqrt{4A-3}}{2A},\; y_-=\frac{1-\sqrt{4A-3}}{2A},\; A>\frac{3}{4} \quad (2)$$

за кои е точно $y_+=g_A(y_-), y_-=g_A(y_+)$. Точките (2) се со период 2 за пресликувањето g_A т.е периодичната орбита со период 2, $orb(x)=\{y \mid y=g_A^{\,2}(x)\}$ е $\{\frac{1+\sqrt{4A-3}}{2A},\frac{1-\sqrt{4A-3}}{2A}\}$.

Да го анализираме однесувањето на системот во точките y_+, y_- дадени со (2). За таа цел наоѓаме $[g_A^{\,2}]'(x)=-4A^2x(1-Ax^2)$ и $[g_A^{\,2}(y_+)]'=[g_A^{\,2}(y_-)]'=4-4A$.

Ако параметарот $A>\frac{3}{4}$ тогаш за точките (2) се добива $[g_A^{\,2}(y_+)]'=[g_A^{\,2}(y_-)]'<1$. Значи точките y_+, y_- дадени со (2) се стабилни (атрактори) неподвижни точки за $g_A^{\,2}$ т.е периодичната орбита со период 2 $\{\frac{1+\sqrt{4A-3}}{2A},\frac{1-\sqrt{4A-3}}{2A}\}$ е стабилна орбита-атрактор.

Од

$$[g_A^{\,2}(x_+)]'=(-1+\sqrt{1+4A})^2>1,$$
$$[g_A^{\,2}(x_-)]'=(1+\sqrt{1+4A})^2>1$$

за $A>\frac{3}{4}$ точките x_+, x_- дадени со (1) и понатаму се нестабилни точки.

Пример: Го разгледуваме пресликувањето $g_2(x)=1-2x^2$ за A=2 кое има неподвижни точки $x_+=\frac{1}{2}$ и $x_-=-1$ добиени од (1), кои се нестабилни бидејќи $|g_2'(\frac{1}{2})|=2>1, |g_2'(-1)|=4>1$. Втората итерација за $g_2(x)$ е $g_2^{\,2}(x)=-8x^4+8x^2-1$ и таа ни дава четири неподвижни точки, каде освен $x_+=\frac{1}{2}, x_-=-1$ со период 1 се јавуваат и две нови точки $y_+=\frac{1+\sqrt{5}}{4}, y_-=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ со период 2 добиени од (2). Тие ни ја даваат периодичната орбита $\{\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{1-\sqrt{5}}{4}\}$ која е стабилна орбита – атрактор.

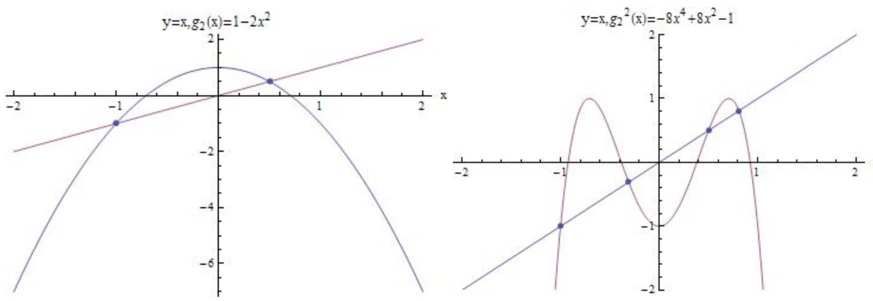
Првата и втората итерација на $g_2(x)$ чии кодови се

```
t1 = Plot[{1 − 2 ∗ x^2, x}, {x, −2,2}, AxesLabel → {"x"}];
t2 = ListPlot[{{−1, −1}, {1/2, 1/2}},
PlotStyle → AbsolutePointSize[5]];
Show[{t1, t2}, PlotLabel → "y = x, "g2"(x) = 1 − 2"x^2]
```

и

```
h[x_]:= 1 − 2 ∗ x^2;
k1 = Plot[{x, Nest[h, x, 2]}, {x, −2,2},
PlotRange → {−2,2}, AxesLabel → {"x"},
PlotLabel → "y = x, "g2^2"(x) = "g2"("g2"(x))"];
k2 = ListPlot[{{−1, −1}, {1/2 , 1/2}, {1/4 (1 − √5), 1/4 (1 − √5)},
{1/4 (1 + √5), 1/4 (1 + √5)}}, PlotStyle → AbsolutePointSize[5]];
Show[{k1,k2},
PlotLabel → "y = x, "g2^2"(x) = −8"x^4" + 8"x^2" − 1"]
```

се дадени на слика 2:



Слика 2. Неподвижни точки за пресликувањата $g_2(x) = 1 - 2x^2$ **и** $g_2^{\,2}(x) = -8x^4 + 8x^2 - 1$

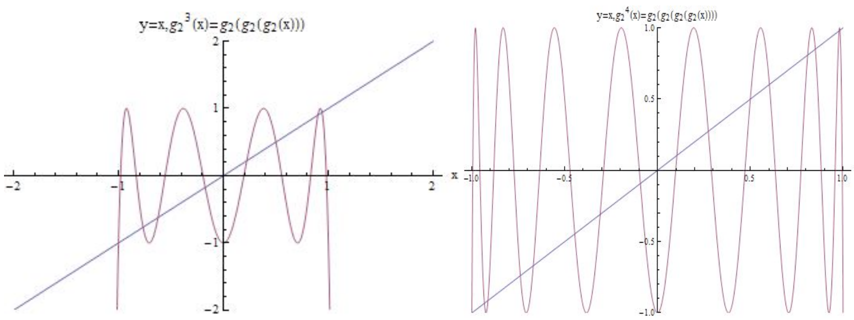
Аналитичкото наоѓање на неподвижни точки во третата итерација $g_2^{\,3}(x)$, четвртата итерација $g_2^{\,4}(x)$ и понатамошните итерации $g_2^{\,n}(x), n \in N$ на пресликувањето $g_2(x)$ е премногу комплексно. Сепак, со користење на компјутер и математички софтвер јасно се гледаат неподвижните точки за која било итерација на $g_2^{\,n}(x), n \in N$. На слика 3 се дадени третата и четвртата итерација чии кодови се

```
h[x_]:= 1 − 2 ∗ x^2;
k1 = Plot[{x, Nest[h, x, 3]}, {x, −2,2},
PlotRange → {−2,2}, AxesLabel → {"x"},
PlotLabel → "y = x, "g2^3"(x) = "g2"("g2"("g2"(x)))"]
```

и

```
h[x_]:= 1 − 2 ∗ x^2;
k1 = Plot[{x, Nest[h, x, 4]}, {x, −2,2},
PlotRange → {−2,2}, AxesLabel → {"x"},
PlotLabel → "y = x, "g2^4"(x) = "g2"("g2"("g2"("g2"(x))))"]
```

каде се јавуваат $8=2^3$ и $16=2^4$ неподвижни точки соодветно:



Слика 3. Неподвижни точки за пресликувањата $g_2{}^3(x)$ и $g_2{}^4(x)$

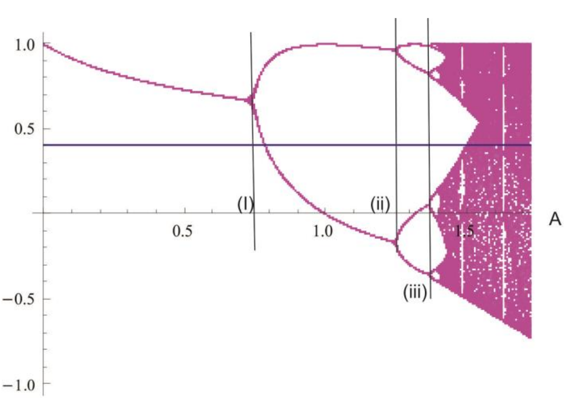
Со зголемување на $n \quad N$ се појавуваат 2^n неподвижни точки, кое е карактеристика и за Логистичкото пресликување како квадратно пресликување.

5. Бифуркационен дијаграм за пресликувањето $f(x)=1 \quad Ax^2$

Како и кај Логистичкото пресликување кое е квадратно пресликување така и ова пресликување $f(x)=1 \quad Ax^2$ во нестабилните точки влегува во циклус со период 2, 4, ... до бесконечност. Вакви неподвижни точки и циклуси ги разгледува бифуркационата теорија. Натаму ќе го анализираме бифуркациониот дијаграм за квадратно пресликување $f(x)=1 \quad Ax^2$ при промена на параметарот од *A*=0 до *A*=2. Како почетна точка на итерациите на пресликувањето f ја земаме $x_0 = 0.4$. Кодот на бифуркациониот дијаграм е

```
f[x_]:= 1 − A * x^2
x0 = 0.4; stepsize = 0.001;
Itermax = 200;
iterate = Compile[{A}, Map[{A, #}&, Union[Drop[NestList[1 − A * # * #&, x0, Itermax],100]]]];
p = Flatten[Table[iterate[A], {A, 0,2, stepsize}],1];
ListPlot[p, PlotStyle → {PointSize[0.001], RGBColor[1,0,1]}, AxesLabel → {"A"}]
```

согласно [3] применет за конкретното пресликување и истиот е даден на слика 4:



Слика 4. Бифуркационен дијаграм на пресликувањето $f(x)=1 \quad Ax^2$

На слика 4 од лево на десно се гледа дека за (i) се јавува бифуркација т.е се јавуваат нови неподвижни точки за втората итерација (периодични точки со период 2). За (ii) се јавуваат периодични точки со период 4. За (iii) се јавуваат периодични точки со период 8. Добиваме едно скалесто правило по кое се води бифуркационото однесување на $f(x)=1 \quad Ax^2$. Вакви бифуркации се правец кон хаос и вакво

комплицирано однесување дава и $f(x) = 1 \quad Ax^2$ за соодветни вредности на параметарот *A*. Со растење на параметарот *A* и густината на бифуркациите, расте и бројот на неподвижните точки. За *x*=0.4 линијата го сече бифуркациониот дијаграм во неподвижни точки кои се добиваат за оваа почетна вредност со менување на параметарот *A*.
Ова скалесто правило кое го опишува ова бифуркационо однесување го дава и Feigenbaum преку дефинирање на универзалната константа $= \lim_{n} \frac{A_{n+1} \quad A_n}{A_{n+2} \quad A_{n+1}}$, каде A_n, A_{n+1}, A_{n+2} се критични параметарски вредности на бифуркационото однесување за параметарот *A*. Според [14], универзалнита константа δ на квадратното пресликување $f(x) = 1 \quad Ax^2$ при

$$A_1 = 0.75, A_2 = 1.25, A_3 = 1.368099,$$
$$A_4 = 1.39405, A_5 = 1.399631, \ldots$$

е пресметана со приближна вредност δ≈4.669.

6. Заклучок

Квадратното пресликување $f(x) = 1 \quad Ax^2$ за *A* реален параметар навидум многу елементарно пресликување, но неговото однесување е комплицирано. Ако наоѓањето и анализата само на неподвижните точки и периодични точки со период 2 е комплицирано, тогаш наоѓањето на периодичните точки со поголем период од 2 е уште по комплицирано. Затоа е значајна и употребата на компјутер и математички софтвер, кои ни даваат дијаграми кои можеме да ги прочитаме. Особено значаен е бифуркациониот дијаграм од кој го читаме однесувањето на пресликувањето со промена на параметарот. Сепак, бифуркационен дијаграм и на ова квадратно пресликување не отстапува од формата на бифуркационите дијаграми на останатите квадратни пресликувања, како што е и познатото Логистичко пресликување.

Користена литература

[1] K.T.Alligood, T.D.Sauer, J.A.Yorke “*Chaos. An introduction to dynamical systems”*, Springer 2000, pp.13-27, 447-455
[2] M.W.Hirs, S.Smale, R.L.Devaney *“Differential equations, dinamical systems and an introduction to chaos”,* Second editions-Elsevier Academic Press 2004, USA, pp. 327-342
[3] S.Lynch *“Dynamical systems with applications using Mathematica”,* USA 2007, pp. 261-280, 288-289
[4] G.Teschl *“Ordynary differential equations and dynamical systems”,* USA 2011, pp. 265-280
[5] J. Shu *“Bifurcation of Quadratic Functions”* August 21, 2013 - unpublished
[6] S.Elaydi *“An introduction to difference equations”,* Springer 2005, USA, pp.1-50
[7] E. Carberry *“Introduction to dynamical system”* Lecture 3: Bifurcation and the Quadratic Map, Springer 2005, USA
[8] B. R. Hunt, J. A.C. Gallas,C. Grebogi, J. A. Yorke, H. Koçak, *“Bifurcation rigidity”,* Elsevier, Physica D 129 (1998) 35-56, USA
[9] J.M. Gutierrez, A. Iglesias *“Mathematica package for analysis and control of chaos in nonlinear systems”,* University of Cantabria, Spain 1998
[10] D. Arroyo, G. Alvarez, V. Fernandez *“On the inadequacy of the logistic map for cryptographic applications”,* Actas de la X Recsi, Salamanca 2008
[11] J.A. de Oliveira, E.R. Papesso, E.D.Leonel *“Relaxation to fixed points in the logistic and cubic maps: analytical and numerical investigation”,* Entropy 2013, ISSN 1099-4300, www.mdpi.com/journal/entropy
[12] A.L.Lloyd *“The coupled logistic map: A simple model for thr effects of spstisl heterogrneity on population dynamics”,* J. theor. Biol. (1995) 173, 217-230
[13] M. Tricarico, F.Visentin *“Logistic map: from order to chaos”,* Applied mathematical sciences Vol.8, Italy, 2014
[14] K. Briggs *“A precise calculation of the Feigenbaum constants”,* Mathematics of computation vol. 57, number 195 july 1991, pages 435-439
[15] R.Martin *“II.2. Analytic results for the Logistic Map”,* PHY 380.03 Spring 2013