УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ" - ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

ISSN:1857-8691

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2015
YEARBOOK
2015

ГОДИНА 4 VOLUME IV

GOCE DELCEV UNIVERSITY - STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2015
YEARBOOK
2015

ГОДИНА 4 **АВГУСТ, 2015** **VOLUME IV**

GOCE DELCEV UNIVERSITY – STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА
YEARBOOK
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

За издавачот:
Проф д-р Цвета Мартиновска Банде

Редакција и администрација	**Address of the editorial office**
Универзитет „Гоце Делчев“-Штип	Goce Delcev University – Stip
Факултет за информатика	Faculty of Computer Science
ул. „Крсте Мисирков“ 10-А	Krste Misirkov 10-A
п. фах 201, 2000 Штип	PO box 201, 2000 Štip,
Р. Македонија	R. of Macedonia

С О Д Р Ж И Н А

ЗАЕМНО ДВИЖЕЊЕ НА НЕБЕСКИ ТЕЛА ПОД ДЕЈСТВО НА СИЛАТА НА ГРАВИТАЦИЈА

Сања Голомеова[1], Владо Гичев[1]

[1] Факултет за Информатика, Универзитет "Гоце Делчев", Штип
sanja.210131@student.ugd.edu.mk
vlado.gicev@ugd.edu.mk

Апстракт. Во овој труд се пресметани динамичките отстапувања на две тела при нивно гравитационо движење (приближување, оддалечување) со примена на Рунге-Кута методот од 4-ти ред. Бидејќи сакаме да го истражуваме релативното поместување на помалото во однос на поголемото тело, од апсолутните поместувања на двете тела ги вадиме поместувањата на поголемото тело. На овој начин поголемото тело е во состојба на мир за целото време на анализата. Иницијално е дадена почетната позиција $(x(t), y(t))$ и почетната брзина $(x'(t), y'(t))$ на помалото во однос на поголемото тело во Декартов координатен систем. Движењето на телата е периодично, со период 8.
Резултатите покажуваат дека кога телата се приближуваат гравитационата сила е поголема и релативното движење е забрзано, а кога се оддалечуваат релативното движење е побавно, односно брзината и забрзувањето на телата се намалува. Отстапувањето на помалото тело од својот фокус, всушност е грешката која се добива при движењето на телото. Грешката е правопопорционална со бројот на периоди, а обратно пропорционална со бројот на дискретни вредности n.
Клучни зборови: *линеарни диференцијални равенки, Рунге-Кута метод, брзина, забрзување.*

THE MOTION OF TWO BODIES UNDER MUTUAL FORCE OF GRAVITY

Sanja Golomeova[1], Vlado Gicev[1]

[1]Faculty of Computer Science, Goce Delcev University, Stip, Macedonia
sanja.210131@student.ugd.edu.mk
vlado.gicev@ugd.edu.mk

Abstract. Abstract: In this paper, we analyze dynamic motion of two bodies under mutual force of gravity. (departure, atraction) using Runge- Kutta 4th order method. Because we want to study relative motion of smaller to larger body, from absolute motion of two bodies, we subtract absolute motion of larger body. Doing this, the larger body is in state of rest for whole duration of the analysis. The relative initial position $(x(t), y(t))$ and relative initial velocity $(x'(t), y'(t)$ in Cartesian coordinate system are given. The relative motion is periodical, with period 8.
The obtained results have shown that, when the bodies are closer, gravitational force is greater and the relative motion is accelerated, and when they departure from each other, it is slower because their velocity and acceleration decrease. The deviation of the position of the smaller body after whole number of periods elapses indicates the computational error. This error is, in direct correlation with the number of periods and reciprocal with the number of discrete values n.
Keywords: *linear differential equations, Runge-Kutta method, velocity, acceleration*.

1. Вовед

Рунге-Кута методот познат како РК метод претставува генерализација на концептот кој се користи во Ојлеровиот метод за решавање на обични диференцијални равенки. Но, Ојлеровиот метод не се препорачува за практична употреба од неколку причини, не е многу прецизен во однос на другите методи и не е стабилен. Ова произлегува од фактот што, во пресметувањето на приближните вредности од t_n до $t_n + \Delta t$ методот го зема во предвид само изводот на почетокот на интервалот, во точката t_n и се добива голема грешка за даден чекор. Поради тоа овој метод е асиметричен во однос на почетокот и крајот на интервалот. Затоа е конструиран посиметричен метод на интеграција со извршување на пробен чекор на средината на интервалот, а потоа вредностите за t и x од средната точка може да се искористат за пресметување на вистинскиот чекор во интервалот. [2]

Овој метод е наречен Рунге-Кута метод од втор ред (1) или метод на средна точка и се претставува со равенствата[1]:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t \cdot f(t_n, x_n) \\ k_2 &= \Delta t \cdot f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ x_{n+1} &= x_n + k_2 + O(\Delta t^3) \end{aligned} \tag{1}$$

каде што, f е диференцијалната фукнција, Δt е големината на чекорот, x_n е почетниот услов.

Најмногу користен метод од Рунге-Кута методите е класичниот Рунге-Кута од четврти ред (2). Овој методот од 4-ти ред бара четири евалуации на десната страна на равенството за чекор Δt. [1], [4]

$$k_1 = \Delta t \cdot f(t_n, x_n) \tag{2}$$
$$k_2 = \Delta t \cdot f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = \Delta t \cdot f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = \Delta t \cdot f(t_n + \Delta t, x_n + k_3)$$
$$x_{n+1} = x_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(\Delta t^5)$$

Овој метод е посупериорен од методот на средна точка. Релативно едноставен е, робустен и е добар кандидат за нумерички решенија на диференцијални равенки, за различна големина на чекор.

2. Модел и пример

Движењето на две тела под заедничко гравитационо привлекување (Слика 1) се опишува со равенките (3) кои се изведени од Њутновиот закон за движење.

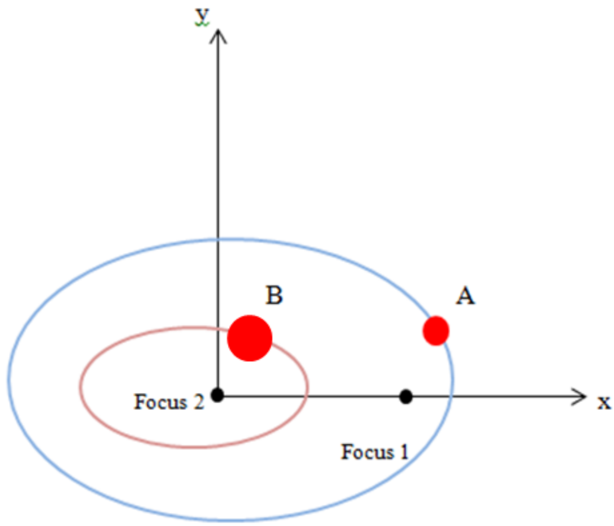
$$x''(t) = -\alpha^2 x(t)/R(t), \tag{3}$$
$$y''(t) = -\alpha^2 y(t)/R(t),$$

каде што $x(t)$ и $y(t)$ ја означуваат позицијата на телото во координатен систем чиј што координатен почеток е фиксиран во второто тело, $R(t) = (x^2(t) + y^2(t))^{\frac{3}{2}}$, и α е константа. Почетните услови се избрани како:

$$x(0) = 1 - \beta,\ x'(0) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \alpha\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{4}$$

Овде β е константа $(0 \leq \beta < 1)$. Орбитата е елипса со ексцентричност β и со фокус во координатниот почеток. Дадено е $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\beta = 0.9$.

Треба да се напише Матлаб програма базирана на класичниот Рунге-Кута метод од 4-ти ред, која ќе го тестира проблемот за големина на чекор $\Delta t = 0.333$. Решението е периодично, со период $P = 8$. За секој земен чекор, програмот треба да ја исцрта позицијата $(x(t), y(t))$, брзината $(x'(t), y'(t))$ и забрзувањето $(x''(t), y''(t))$ на телата. Како брзината и забрзувањето на телата зависат од нивното приближување и оддалечување?



Слика 1. Модел на елиптичните орбити на двете тела A и B
Figure 1. Model of the elliptical orbit of the bodies A and B

Методот Рунге-Кута од 4-ти ред може да се примени кај линеарни диференцијални равенки запишани во форма $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$. За да може да се примени овој метод во решавањето на погоре дадениот систем од равенки, најпрво е потребно системот од линеарни диференцијални равенки од втор степен да се сведи на систем од линеарни диференцијални равенки од прв степен (6). За да се направи тоа, треба да се воведат две нови променливи (5): x_2 и y_2.

$$\begin{aligned} &{x_1}'(t) = x_2(t), \\ &{y_1}'(t) = y_2(t), \\ &x_2'(t) = x''(t) = -\alpha^2 x(t)/R(t), \\ &{y_2}'(t) = y''(t) = -\alpha^2 y(t)/R(t). \end{aligned} \tag{5}$$

На овој начин се добива систем од четири линеарни диференцијални равенки:

$$\frac{dy}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -\alpha^2 x/R \\ -\alpha^2 y/R \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1(t,x_1,y_1,x_2,y_2) \\ f_2(t,x_1,y_1,x_2,y_2) \\ f_3(t,x_1,y_1,x_2,y_2) \\ f_4(t,x_1,y_1,x_2,y_2) \end{pmatrix} \equiv f(t, y) \tag{6}$$

По добивањето на системот од четири линеарни диференцијални равенки, може да се примени Рунге-Кута 4 методот за решавање на истиот. Почетните услови се (7):

$$x(0) = 1 - \beta = 1 - 0.9 = 0.1, \quad x_2(0) = x'(0) = 0, \tag{7}$$

$$y(0) = 0, \quad y_2(0) = y'(0) = \alpha\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{1+0.9}{1-0.9}} = 3.4235$$

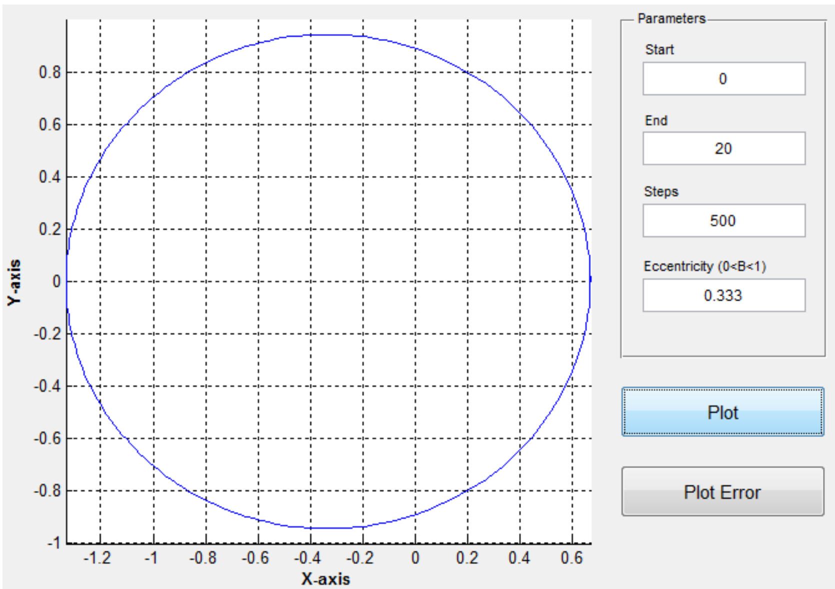
Табела 1. Решение на системот од линеарни диференцијални равенки со Рунге-Кута од 4-ти ред, за $\Delta t = 0.333$
Table 1. The solution of a system of linear differential equations with Runge-Kutta 4th order, Δt = 0.333

	k_1	k_2	k_3	k_4	апроксимирана вредност $(t_{n+1} = t_n + \Delta t)$
$x_1(0.333)$	0	0	0	0	0.1
$y_1(0.333)$	3.4235	3.9935	4.0884	4.7849	1.3525
$x_2(0.333)$	-61.6225	0.00207	-61.2487	5.2501	-9.92704
$y_2(0.333)$	0	0	0	0	3.4235

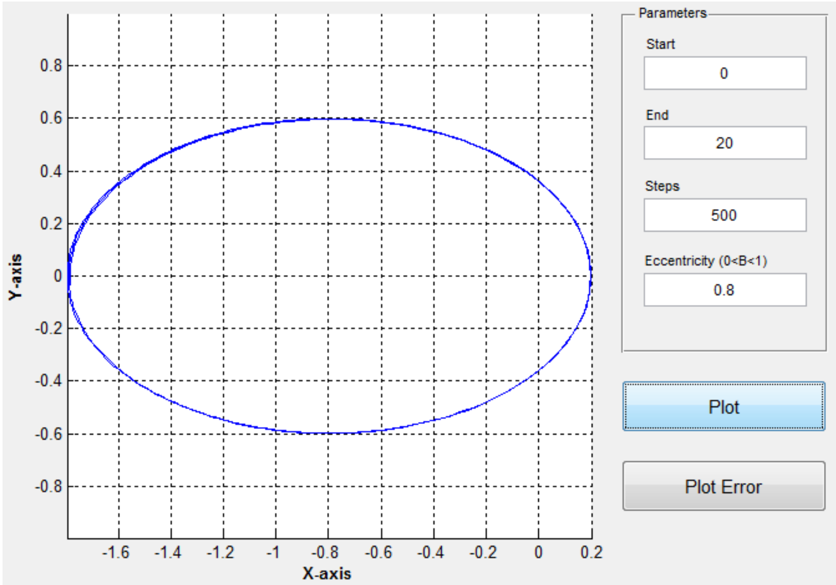
3. Резултати

За програмско решавање на проблемот е креиран графички кориснички интерфејс во Матлаб програмскиот јазик, преку кој се задаваат вредностите за почетното време, крајното време, бројот на чекорите и ексцентричноста на системот.

Доколку се тестира програмот за исто време t (0-20), ист број на чекори, 500 чекори и различна ексцентричност на системот за $\beta = 0.333$ (Слика 2) и $\beta = 0.8$ (Слика 3) ќе се согледа дека со помала ексцентричност телата А и В се приближуваат и отстапувањето на телото А од својот фокус (error(E)), кое го добиваме со Рунге-Кута методот е минимално (Слика 4), а со зголемувањето на ексцентричноста на системот, телата ќе се оддалечуваат и грешката ќе се зголемува (Слика 3).

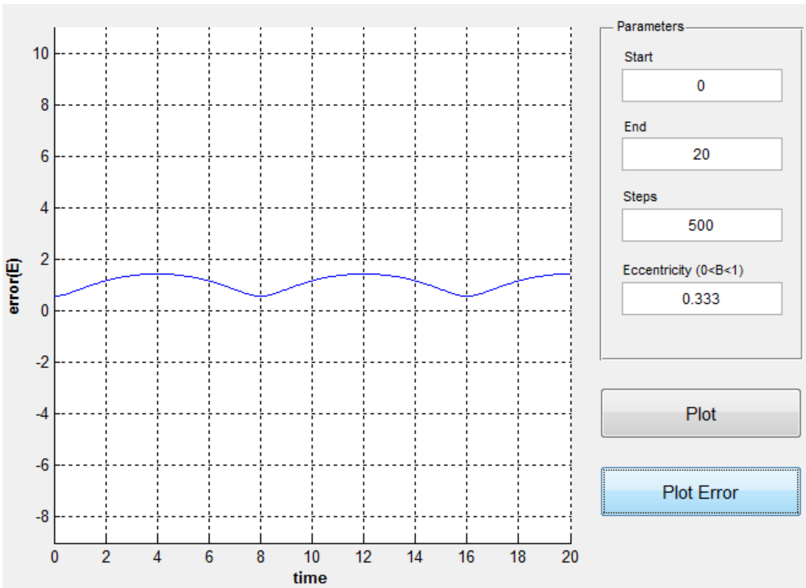


Слика 2. Тестирање на Рунге-Кута 4 методот за $\beta = 0.333$
Figure 2. Testing the Runge-Kutta 4th order method with β = 0.333



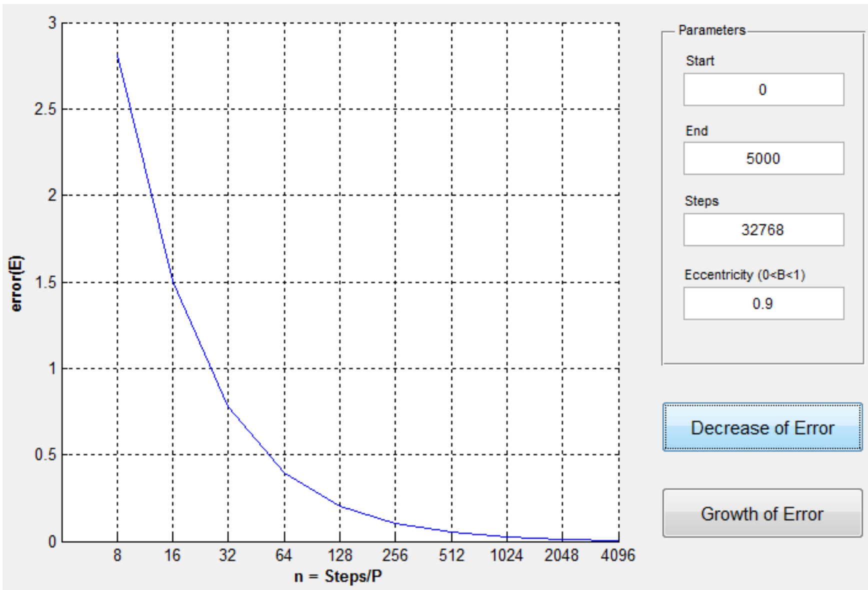
Слика 3. Тестирање на Рунге-Кута 4 методот за $\beta = 0.8$
Figure 3. Testing the Runge-Kutta 4th order method with β = 0.8

Кога телото А во некое време t ќе се најде во својот фокус, само тогаш грешката ќе има вредност 0 и ќе се добијат точните вредности на системот равенки (невозможно со Рунге-Кута методот!).



Слика 4: Графички приказ на грешката во случај кога $\beta = 0.333$
Figure 4: Graphical representation of error in the case where β = 0.333

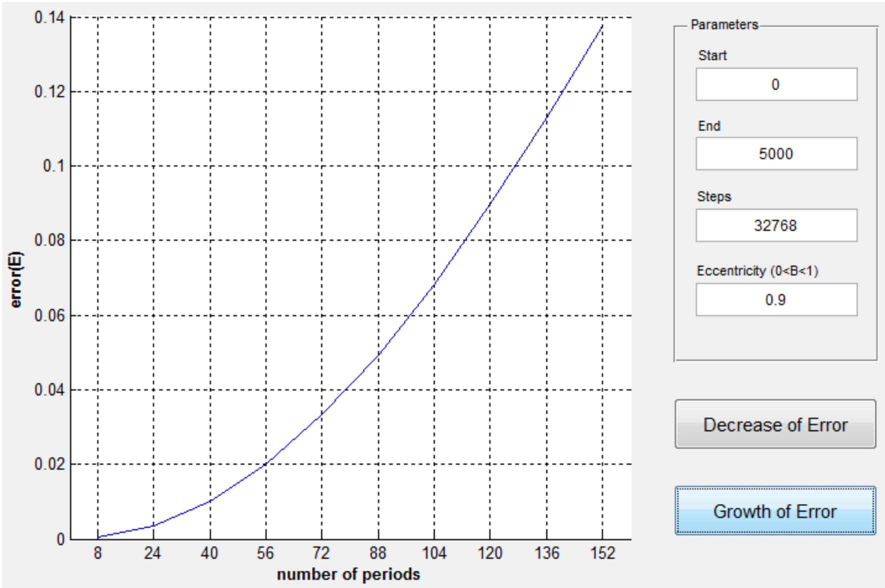
Бидејќи движењето на телото е периодично, грешката е диференцијална функција зависна од $n\ (n = \frac{steps}{P})$ дискретните точки (Слика 5) и периодот P (Слика 6). Слика 5 покажува дека таа е обратнопропорционална со вредностите на дискретните точки, бидејќи за поголема вредност се добива помала грешка и обратно.



Слика 5: Графички приказ на зависноста помеѓу бројот на дискретните n вредности и грешката кај Рунге-Кута 4 методот

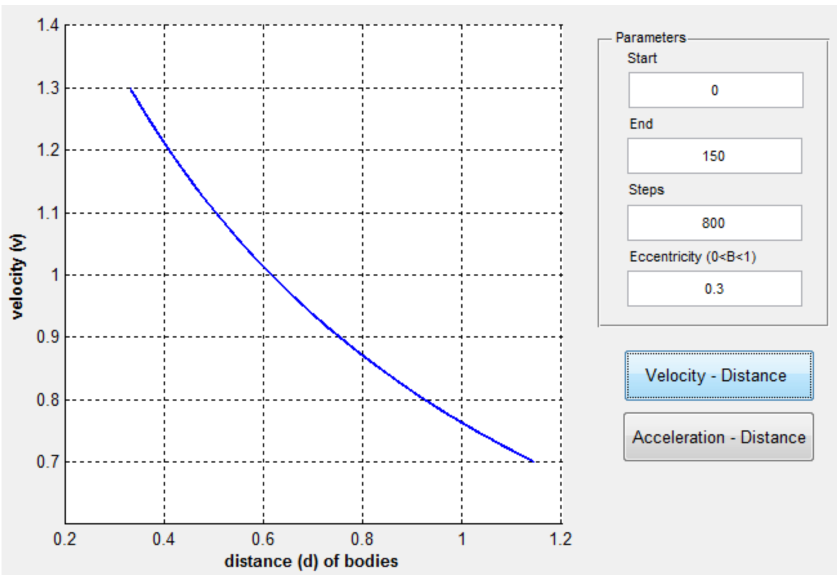
Figure 5: Graphical representation of the relationship between the number of discrete values n and error in Runge-Kutta 4 method

Зависноста на грешката од бројот на периодите е прикажана во 10 точки на Слика 6. Од добиениот резултат се гледа дека во првата точка грешката е најмала бидејќи бројот на периоди е најмал, до последната точка како периодите се зголемуваат, се зголемува и грешката. Овде грешката е правопропорционална со бројот на периодите.

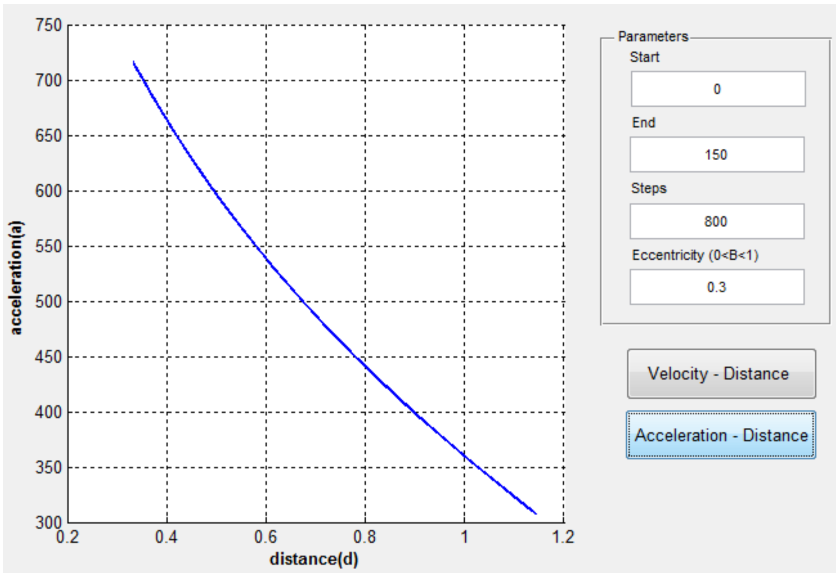


Слика 6: Графички приказ на зависноста помеѓу бројот на периодите и грешката кај Рунге-Кута 4 методот
Figure 6: Graphical representation of the relationship between the number of periods and error in Runge-Kutta 4 method

Брзината (v) и забрзувањето (a) на телата се векторски величини кои зависат од оддалеченоста (d) на двете тела. Кога телото A се наоѓа близу телото B, на мала оддалеченост, гравитационата сила е поголема, телото A се движи со зголемена брзина (Слика 7), а со тоа се зголемува и неговото забрзување (Слика 8). Во обратен случај, кога телата се оддалечуваат, имаме мала гравитација и брзината и забрзувањето на телото A се намалуваат (Слика 7 и Слика 8).



Слика 7: Графички приказ на зависноста на брзината и оддалеченоста на телата A и B
Figure 7: Graphical representation of the relationship between the velocity and distance of bodies A and B



Слика 8: Графички приказ на зависноста на забрзувањето и оддалеченоста на телата А и В
Figure 8: Graphical representation of the relationship between acceleration and distance of bodies A and B

4. Заклучок

Решението на системот равенки го тестираме за β = 0.333 бидејќи за помала ексцентричност се добиваат апроксимирани решенија кои се поблиску до точните решенија на системот. Со Рунге-Кута методите не можеме да ги добиеме точните решенија, но можеме да ги добиеме нивните приближни вредности, со најминимална грешка.

Со примената на Рунге-Кута методот од 4-ти ред во нумеричкото решавање на системите од диференцијални равенки добиваме брза и лесна нумеричка интеграција, мали отстапувања на апроксимираните од точните решенија, релативно мали грешки по големина на чекор и мали грешки за мали временски интервали со поголем број на чекори.

Користена литература

1. Gonze, D.(2013). *Numerical methods for Ordinary Differential Equations*. pp. 10-11.
2. Press, W. H., Teukolsky ,S. A., Vetterling,W. T., Flannery, B. P. (1997). *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing Second Edition*, USA. pp. 704-708.
3. Young, T., Mohlenkamp J. M. (2015). *Introduction to Numerical Methods and Matlab Programming for Engineers*, Department of Mathematics, Ohio University. pp. 115-117.
4. Википедија (2014). Runge-Kutta methods. Преземено на 14 декември 2014г. http://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods