



**УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ - ШТИП  
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА**

---

---

ISSN:1857-8691

**ГОДИШЕН ЗБОРНИК  
2015  
YEARBOOK  
2015**

**ГОДИНА 4**

**VOLUME IV**

---

---

**GOCE DELCEV UNIVERSITY - STIP  
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE**

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП  
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

---



**ГОДИШЕН ЗБОРНИК**  
**2015**  
**YEARBOOK**  
**2015**

ГОДИНА 4

АВГУСТ, 2015

VOLUME IV

---

GOCE DELCEV UNIVERSITY – STIP  
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

**ГОДИШЕН ЗБОРНИК  
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА  
YEARBOOK  
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE**

За издавачот:

**Проф д-р Цвета Мартиновска Банде**

**Издавачки совет**

Проф. д-р Блажо Боев  
Проф. д-р Лилјана Колева - Гудева  
Проф. д-р Владо Гичев  
Проф. д-р Цвета Мартиновска Банде  
Проф. д-р Татајана Атанасова - Пачемска  
Доц. д-р Зоран Здравев  
Доц. д-р Александра Милева  
Доц. д-р Сашо Коцески  
Доц. д-р Наташа Коцеска  
Доц. д-р Зоран Утковски  
Доц. д-р Игор Стојановиќ  
Доц. д-р Благој Делипетров

**Редакциски одбор**

Проф. д-р Цвета Мартиновска Банде  
Проф. д-р Татајана Атанасова - Пачемска  
Доц. д-р Наташа Коцеска  
Доц. д-р Зоран Утковски  
Доц. д-р Игор Стојановиќ  
Доц. д-р Александра Милева  
Доц. д-р Зоран Здравев

**Главен и одговорен уредник**

Доц. д-р Зоран Здравев

**Јазично уредување**

Даница Гавриловска - Атанасовска  
(македонски јазик)  
Павлинка Павлова-Митева  
(англиски јазик)

**Техничко уредување**

Славе Димитров

**Редакција и администрација**  
Универзитет „Гоце Делчев“ - Штип  
Факултет за информатика  
ул. „Крсте Мисирков“ 10-А  
п. фах 201, 2000 Штип  
Р. Македонија

**Editorial board**

Prof. Blazo Boev, Ph.D.  
Prof. Liljana Koleva - Gudeva, Ph.D.  
Prof. Vlado Gicev, Ph.D.  
Prof. Cveta Martinovska Bande, Ph.D.  
Prof. Tatjana Atanasova - Pacemska, Ph.D.  
Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.  
Ass. Prof. Aleksandra Mileva, Ph.D.  
Ass. Prof. Saso Koceski, Ph.D.  
Ass. Prof. Natasa Koceska, Ph.D.  
Ass. Prof. Zoran Utkovski, Ph.D.  
Ass. Prof. Igor Stojanovik, Ph.D.  
Ass. Prof. Blagoj Delipetrov, Ph.D.

**Editorial staff**

Prof. Cveta Martinovska Bande, Ph.D.  
Prof. Tatjana Atanasova - Pacemska, Ph.D.  
Ass. Prof. Natasa Koceska, Ph.D.  
Ass. Prof. Zoran Utkovski, Ph.D.  
Ass. Prof. Igor Stojanovik, Ph.D.  
Ass. Prof. Aleksandra Mileva, Ph.D.  
Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.

**Managing/ Editor in chief**

Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.

**Language editor**

Danica Gavrilovska-Atanasovska  
(macedonian language)  
Pavlinka Pavlova-Miteva  
(english language)

**Technical editor**

Slave Dimitrov

**Address of the editorial office**

Goce Delcev University – Stip  
Faculty of Computer Science  
Krste Misirkov 10-A  
PO box 201, 2000 Štip,  
R. of Macedonia

## СОДРЖИНА

<b>АНАЛИЗА НА ОДНЕСУВАЊЕТО НА ЕДНО КВАДРАТНО ПРЕСЛИКУВАЊЕ КАКО ДИСКРЕТЕН ДИНАМИЧКИ СИСТЕМ</b> Билјана Златановска .....	5
<b>Е-УЧЕЊЕ АПЛИКАЦИЈА ПО ПРЕДМЕТОТ ИНФОРМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД VII ОДЕЛЕНИЕ</b> Благој Делипетрев, Марија Пупиноска-Гогова.....	13
<b>ЗАЕМНО ДВИЖЕЊЕ НА НЕБЕСКИ ТЕЛА ПОД ДЕЈСТВО НА СИЛАТА НА ГРАВИТАЦИЈА</b> Сања Голомеова, Владо Гичев .....	21
<b>ЕЛЕКТРОНСКО ТЕСТИРАЊЕ НАСПРОТИ КЛАСИЧЕН НАЧИН НА ТЕСТИРАЊЕ ПО УНИВЕРЗИТЕТСКИОТ ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА</b> Билјана Златановска , Мирјана Коцалева , Александар Крстев , Зоран Здравев ...	29
<b>НЕКОИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ОД НЕПРЕКИНАТ ТИП</b> Зоран Трифунов, Елена Карамазова .....	33
<b>ОПТИМИЗАЦИЈА НА МЕТОДИ НА ИНТЕРПОЛАЦИЈА СО ПАРАЛЕЛИЗАМ КАЈ ПРЕСМЕТКИ НА ПРОИЗВОДСТВО, МЕРЕЊА НА РЕЗЕРВОАРИ</b> Горан Петров, Владо Гичев.....	45
<b>АНАЛИЗА НА ПРОЦЕСОТ НА СЕРТИФИКАЦИЈА НА ИНФОРМАЦИСКИТЕ СИСТЕМИ НА ДРЖАВНИТЕ ОРГАНИ ВО РЕПУБЛИКА МАКЕДОНИЈА СОГЛАСНО ЗАКОНОТ ЗА ЕЛЕКТРОНСКО УПРАВУВАЊЕ</b> Александар Арсовски, Александра Милева .....	63
<b>ОДМАГЛУВАЊЕ НА СЛИКИ СО БАРКОДОВИ</b> Катерина Цекова, Игор Стојановиќ.....	71

## НЕКОИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ОД НЕПРЕКИНАТ ТИП

Зоран Трифунов<sup>1</sup>, Елена Карамазова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Факултет за информатика, Универзитет „Гоце Делчев“, Штип  
[zoran.trifunov@ugd.edu.mk](mailto:zoran.trifunov@ugd.edu.mk)

<sup>2</sup> Факултет за информатика, Универзитет „Гоце Делчев“, Штип  
[elena.gelova@ugd.edu.mk](mailto:elena.gelova@ugd.edu.mk)

**Апстракт.** Целта на овој труд е со користење на информатичка технологија, слободен софтвер и постоечките дефиниции на случајните променливи од непрекинат тип да направиме визуелно презентирање на случајните променливи со рамномерна и нормална распределба за полесно препознавање и совладување од студентите. Во трудот ќе бидат наведени и примери на случајни променливи со рамномерна и нормална распределба, со практична примена како и визуелно претставување на PDF и CDF во софтверот Геогebra.

**Клучни зборови:** рамномерна, нормална, распределба, визуелизација, Геогebra.

## SOME RANDOM VARIABLES OF CONTINUOUS TYPE

Zoran Trifunov<sup>1</sup>, Elena Karamazova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Faculty of computer science, Goce Delcev University, Stip, Macedonia  
[zoran.trifunov@ugd.edu.mk](mailto:zoran.trifunov@ugd.edu.mk)

<sup>2</sup> Faculty of computer science, Goce Delcev University, Stip, Macedonia  
[elena.gelova@ugd.edu.mk](mailto:elena.gelova@ugd.edu.mk)

**Abstract.** The aim of this paper is the usage of information technology, free software and the existing definitions of random variables of continuous type to visually present of random variable with uniform and normal distribution for easier recognition and learning by the students. In the paper it will be given an example of a random variable with uniform and normal distribution with practical implementation and visual presentation of PDF and CDF in the software GeoGebra.

**Key Words:** uniform, normal, distribution, visualization, GeoGebra.

## 1. Вовед

Постојат два типа на случајни променливи: случајни променливи чие множество на вредности е дискретно (конечно или бесконечно) и за секое  $x_i \in R_X$ ,  $P\{X = x_i\} > 0$ , и случајни променливи чие множество вредности е некој интервал од реални броеви и за кои  $P\{X = x\} = 0$ ,  $x \in R_X$ .

Во оваа статија визуелно ќе ги претставиме само некои случајните променливи од непрекинат тип.

Случајната променлива  $X$ ,  $X: \Omega \rightarrow R_X$  е од непрекинат тип, ако множеството вредности на функцијата е интервал  $R_X = [a, b]$  од реални броеви и важи  $P\{X=x\}=0$ , за секој  $x \in R_X$ .

**Дефиниција.** Нека  $x, x + \Delta x \in (a, b)$  и нека  $\Delta x > 0$ . Ако постои граница

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < X < x + \Delta x\}}{\Delta x},$$

тогаш функцијата  $f(x)$  се нарекува **густина на распределба на веројатноста PDF** на случајната променлива  $X$  од непрекинат тип.

**Својство.** За функцијата  $f: [a, b] \rightarrow R$  велиме дека е густина на распределба на случајната променлива  $X$  од непрекинат тип, ако важи:

- $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$ ;
- $f(x) = 0, x \notin [a, b]$ ;
- $\int_a^b f(x) dx = 1$ .

Густина на распределба на веројатноста PDF на случајната променлива  $X$  од непрекинат тип нема табеларен приказ, може да се претстави алгебарски и графички.

**Дефиниција. Кумулативна функција на распределба CDF** е функција која ја определува кумулативната веројатност  $P\{X \leq x\}$  на вредности, за секоја вредност на  $x$  од случајната променлива  $X$ .

Ако постои интегрална функција  $f(x)$ , така што за функцијата на распределба на веројатноста на случајната променлива  $X$  е точно равенството

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

при што е исполнето дека  $f(x)=0$ , за  $x < a$  или  $x > b$ , тогаш за функцијата  $F(x)$  велиме дека е кумулативна функција на распределба на случајната променлива  $X$  од непрекинат тип.

Кумулативната функција на распределба CDF на случајната променлива  $X$  од непрекинат тип нема табеларен приказ, може да се претстави алгебарски и графички.

## 2. Визуелно претставување на рамномерна и нормална распределба во Геогедра

### 2.1. Рамномерна распределба

Случајната променлива  $X$  има рамномерна распределба на интервалот  $(a, b)$ , ознака  $X \sim U(a, b)$ , ако нејзината функција за густина е константна на интервалот  $(a, b)$ , а е еднаква на 0, надвор од него, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} C; & x \in [a, b] \\ 0; & x \notin [a, b] \end{cases}$$

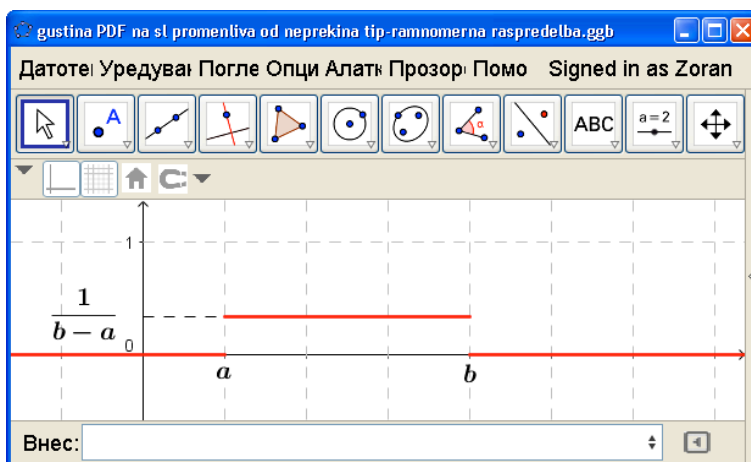
Константата  $C$  се определува од условот дека определениот интеграл треба да биде еднаков на 1, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b 0 dx + \int_a^b C dx + \int_b^{+\infty} 0 dx = C x \Big|_a^b = C(b - a).$$

Добиваме, алгебарски претставена густината на распределба PDF на случајната променлива  $X$  е:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}; & x \in [a, b] \\ 0; & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Графики претставена PDF во Геогедра е:



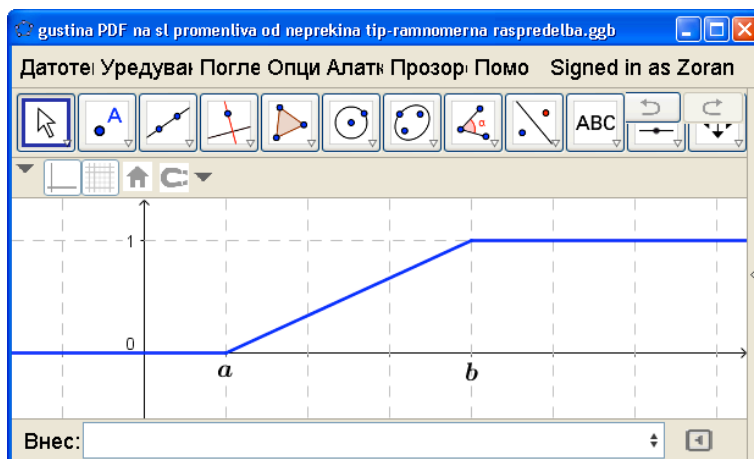
Слика 1. PDF на рамномерна распределба

Кумулативна функција на распределба CDF на случајната променлива  $X \sim U(a, b)$  се определува со пресметување на интегралите  $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ , за трите интервали посебно.

Следува,

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ 1; & x > b \end{cases}$$

Графички преставена CDF во Геогедра е:



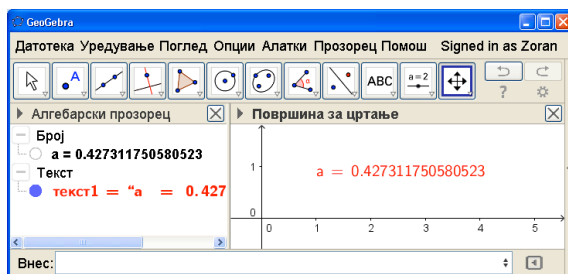
Слика 2. CDF на рамномерна распределба

Пример 1. Генерираме (избираме) случаен број во интервалот  $[0,1]$  и го запишуваме резултатот.

Да се определи густина на распределба на веројатноста PDF и кумулативната функција на распределба CDF на случајната променлива  $X$ : генерирање број помеѓу 0 и 1 и запишување на неговата вредност.

Решение: Во Геогедра генерираме случаен број помеѓу 0 и 1 со наредбата „random()“, запишана во полето за внес и притискаме на ентер. Со користење на F9 се генерира нов број.





Слика 3. Генерирање на случаен број

Просторот на примероци е  $\Omega=[0,1]$  и множеството вредности е  $R_X=[0,1]$ . Дефинираме функцијата  $X: \Omega \rightarrow [0,1]$  зададена со  $X(x)=x$ , за која е исполнето:

- $R_X$  е интервал и
- $P\{X=x\}=0$ , за секој  $x \in \Omega$ .

Следува,  $X$  е случајна променлива од непрекинат тип.

Случајната променлива  $X: \Omega \rightarrow [0,1]$  има должина на интервал 1.

Генерирање број помеѓу 0 и 1 е еднакво можно, т.е. функцијата  $f(x)$  треба да ја има истата вредност, односно константна за секој  $x \in [0,1]$ . Бидејќи должината на

интервалот е 1, константата ќе биде  $\frac{1}{1} = 1$ .

Да се генерира број надвор од интервалот  $[0,1]$  не е можно. Следува, функцијата  $f(x)$  треба да ја има вредноста 0 за секој  $x \notin [0,1]$ .

Дефиниравме функција  $f: R \rightarrow R$  со:

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \in [0,1] \\ 0; & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Функцијата  $f(x) = 0$ , за секое  $x \notin R$ , и притоа е исполнето

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 1 dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = 0 + x \Big|_0^1 + 0 = 1 \quad 0 = 1$$

т.е. површината на фигурата под функцијата има плоштина 1.

Следува, функцијата

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \in [0,1] \\ 0; & x \notin [0,1] \end{cases}$$

е густина на распределба на веројатноста PDF на случајната променлива  $X$  генерирање на број помеѓу 0 и 1.

Бидејќи  $R_X=[0,1]$ , дефинираме функција  $F(x)$  на следниот начин:

$F(0)=0$ , и за  $x < 0$ ,

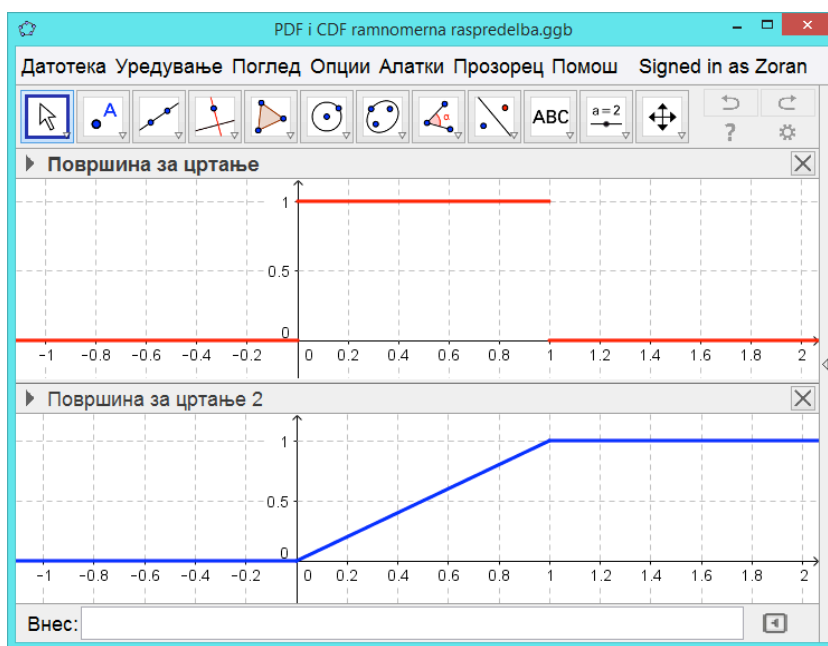
$F(1)=1$ , и за  $x > 1$ , и

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^0 0 dt + \int_0^x 1 dt = 0 + t \Big|_0^x = x \quad 0 \leq x \leq 1$$

Со ова ја добиваме CDF на функцијата во алгебарски приказ

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ x; & 0 \leq x \leq 1 \\ 1; & x > 1 \end{cases}$$

Табеларен приказ на PDF и CDF на случајната променлива  $X$  во Геогебра користејќи ги двете површини за цртање е:



Слика 4. PDF и CDF на рамномерна распределба

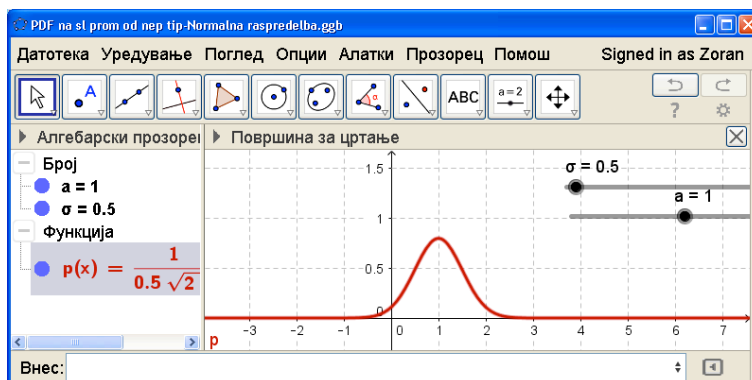
## 2.2. Нормална распределба

Случајната променлива  $X$  има нормална распределба (*Гаусова распределба*) со параметри  $a$  и  $\sigma^2$  ( $a$  – аритметичка средина на бесконечно многу мерења на податоци,  $\sigma$  - нивна стандардна девијација), ако нејзината густина на распределба е дадена со функцијата:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \text{ за } x \in \mathbf{R},$$

каде што  $a \in \mathbf{R}$  и  $\sigma > 0$  се дадени константи. Ознака  $X \sim N(a, \sigma^2)$ .

Графички претставена PDF на случајната променлива во Геогедра со помош на лизгачи за параметрите  $a$  и  $\sigma^2$ , е:

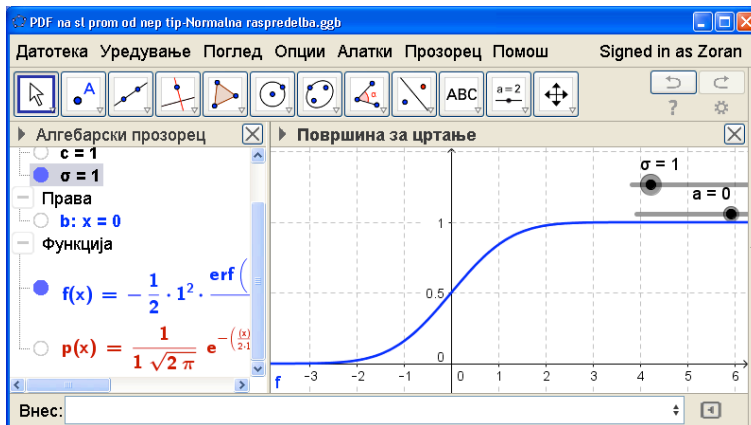


Слика 5. PDF на нормална распределба

Со пресметувањето на определениот интеграл, т.е. површината под функцијата  $f(x)$ , ќе може алгебарски и графички да се претстави CDF.

Но, пресметување на определениот интеграл и површината под функцијата  $f(x)$  не е можно на стандарден начин, бидејќи не може да го сведеме на интеграл од елементарна функција. Претходно за пресметување на овој интегралот прво се заменува случајната променлива во случајна променлива со стандардна нормална распределба ( $a=0$ ,  $\sigma=1$ ) и се користеле таблици или постапки за приближно пресметување на определени интеграл, а денес со помош на калкулатор и компјутер може да се пресмета вредноста на интегралот и графички да се претстави CDF на случајната променлива  $X \sim N(a, \sigma^2)$ .

Графичко претставување на кумулативната функција на распределба CDF на случајната променлива  $X \sim N(a, \sigma^2)$ , е:



Слика 6. CDF на нормална распределба

Пример 2. Бројот на поени со кои се оценети студентите на еден испит е случајна променлива  $X$  со нормална распределба  $X \sim N(a, \sigma^2)$ . Професорот ги формира оценките според правилото на три сигми, т.е. ја користи табелата:

Поени	оцена
$a + \sigma \leq X$	10
$a \leq X < a + \sigma$	9
$a - \sigma \leq X < a$	8
$a - 2\sigma \leq X < a - \sigma$	7
$a - 3\sigma \leq X < a - 2\sigma$	6
$X < a - 3\sigma$	5

Колкав процент од студентите кои го полагаале испитот ќе добијат оцена 10, 9, 8, 7, 6 или 5?

Вкупниот број на поени на тестот е 100. После сумирањето на резултатите е добиено дека  $a = 72$  – аритметичка средина и  $\sigma = 13$  - стандардна девијација т.е.  $X \sim N(72, 13^2)$ .

Решение: Процентот на студенти кои ќе добијат определена оцена е еднаков на веројатноста дека случајно избран студент ќе ја добие истата таа оцена.

Дефинираме случајна променлива  $X$  со нормална распределба со  $a = 72$  – аритметичка средина и  $\sigma = 13$  - стандардна девијација т.е.  $X \sim N(72, 13^2)$

Користејќи определен интеграл и слободниот софтвер Геогebra ќе ги пресметаме вредностите.

Оцена 10, веројатноста дека бројот на освоени бодови ќе биде поголем или еднаков на  $a + \sigma = 85$  бодови.

$$P(X \geq a+ ) = P(X \geq 85) = \int_{85}^{+\infty} \frac{1}{13\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-72)^2}{2 \cdot 13^2}} dx = 0,15866$$

Следува, 15,866 % од студентите ќе добијат оцена 10.

Оцена 9, веројатноста дека бројот на освоени бодови ќе биде во границите  $a \leq X < a+$  т.е.  $72 \leq X < 85$ .

$$P(a \leq X < a+ ) = P(72 \leq X < 85) = \int_{72}^{85} \frac{1}{13\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-72)^2}{2 \cdot 13^2}} dx = 0,34134$$

Следува, 34,134% од студентите ќе добијат оцена 9.

Оцена 8, веројатноста дека бројот на освоени бодови ќе биде во границите  $a \leq X < a$  т.е.  $59 \leq X < 72$ .

$$P(a \leq X < a) = P(59 \leq X < 72) = 0,34134$$

Следува, 34,134% од студентите ќе добијат оцена 8.

Оцена 7, веројатноста дека бројот на освоени бодови ќе биде во границите  $a-2 \leq X < a$  т.е.  $46 \leq X < 59$ .

$$P(a-2 \leq X < a) = P(46 \leq X < 59) = 0,13591$$

Следува, 13,591% од студентите ќе добијат оцена 7.

Оцена 6, веројатноста дека бројот на освоени бодови ќе биде во границите  $a-3 \leq X < a-2$  т.е.  $33 \leq X < 46$ .

$$P(a-3 \leq X < a-2) = P(33 \leq X < 46) = 0,0214$$

Следува, 2,140 % од студентите ќе добијат оцена 6.

Оцена 5, веројатноста дека бројот на освоени бодови ќе биде помал од  $a-3 = 33$  бодови.

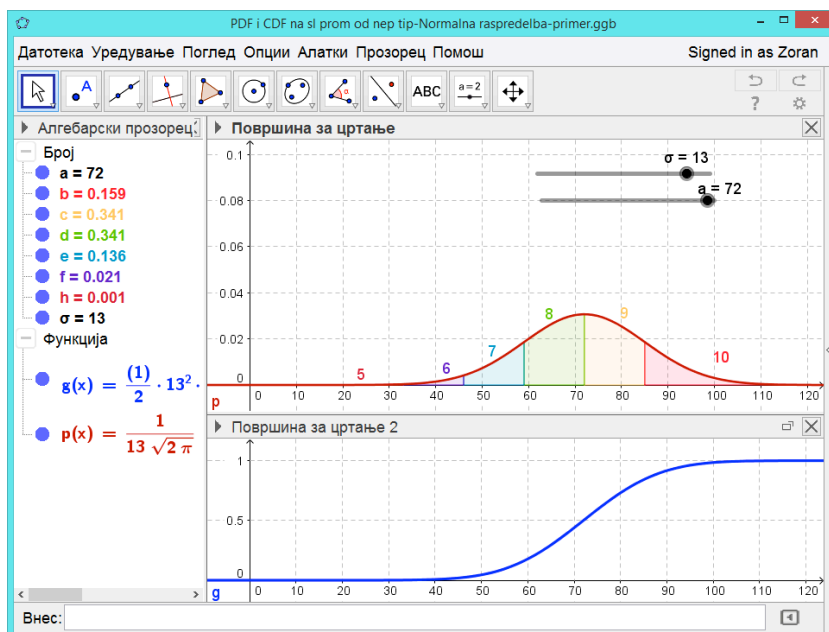
$$P(X < a-3) = P(X < 33) = 0,00135$$

Следува, 0,135% од студентите ќе добијат оцена 5.

Претставено во табела добиваме:

поени	Оцена	Процент
$85 \leq X$	10	15,866
$72 \leq X < 85$	9	34,134
$59 \leq X < 72$	8	34,134
$46 \leq X < 59$	7	13,591
$33 \leq X < 46$	6	2,140
$X < 33$	5	0,135

На сликата е претставена PDF и CDF на случајната променлива  $X \sim N(72, 13^2)$ .



Слика 7. PDF и CDF на нормална распределба

Со поместување на лизгачите може да се определат PDF и CDF за различни податоци добиени за аритметичката средина и стандардната девијација.

### 3. Заклучок

Во овој труд визуелно се претставени случајни променливи од непрекинат тип со рамномерна и нормална распределба со помош на софтверот Геогebra. Со визуелното претставување на случајните променливи од непрекинат тип сакаме да постигнеме, студентите полесно да го совладуваат наставниот материјал и лесно да ги препознаваат случајните променливи од непрекинат тип при решавање на задачи.

### Референци

- [1] Стојановска Л., Трифунов З., (2008). *Вовед во Геогebra*, ТФБ, скрипта.
- [2] Берцекас Д., Цициклис Ц., (2012). *Вовед во Веројатност*.
- [3] Стојановска Л., Трифунов З., (2010). *ИКТ пристап во Конечна математика*, ТФБ, книга.
- [4] Туневски Н., (2008). *Збирка задачи по Веројатност и статистика*, МФС, книга.
- [5] Геогebra, *Динамички материјали*,  
<http://tube.geogebra.org/search/perform/search/Zoran>