



УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ - ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

ISSN:1857-8691

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2016/2017
YEARBOOK
2016/2017

ГОДИНА 5

VOLUME V

GOCE DELCEV UNIVERSITY - STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА



ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2016/2017
YEARBOOK
2016/2017

ГОДИНА 5

МАЈ, 2017

VOLUME V

GOCE DELCEV UNIVERSITY – STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

**ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА
YEARBOOK
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE**

За издавачот:

Проф д-р Цвета Мартиновска Банде

Издавачки совет

Проф. д-р Блажо Боев
Проф. д-р Лилјана Колева - Гудева
Проф. д-р Цвета Мартиновска Банде
Проф. д-р Александра Милева
Проф. д-р Зоран Здравев
Доц. д-р Билјана Златановска
Доц. д-р Александар Крстев

Редакциски одбор

Проф. д-р Цвета Мартиновска
Проф. д-р Владо Гичев
Проф. д-р Татјана Атанасова - Пачемска
Проф. д-р Александра Милева
Проф. д-р Зоран Утковски
Проф. д-р Зоран Здравев
Проф. д-р Сашо Коцески
Проф. д-р Наташа Коцеска
Проф. д-р Благој Делипетров
Доц. д-р Игор Стојановиќ
Доц. д-р Билјана Златановска
Доц. д-р Александар Крстев
Доц. д-р Наташа Стојковиќ
Доц. д-р Доне Стојанов
Доц. д-р Мартин Лукаревски

Главен и одговорен уредник

Доц. д-р Билјана Златановска

Јазично уредување

Даница Гавриловска - Атанасовска
(македонски јазик)
м-р Снежана Кирова
(англиски јазик)

Техничко уредување

Славе Димитров
Благој Михов

Редакција и администрација

Универзитет „Гоце Делчев“ – Штип
Факултет за информатика
ул. „Крсте Мисирков“ 10-А
п. фах 201, 2000 Штип
Р. Македонија

Editorial board

Prof. Blazo Boev, Ph.D.
Prof. Liljana Koleva - Gudeva, Ph.D.
Prof. Cveta Martinovska Bande, Ph.D.
Prof. Aleksandra Mileva, Ph.D.
Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.
Ass. Prof. Biljana Zlatanovska, Ph.D.
Ass. Prof. Aleksandar Krstev, Ph.D.

Editorial staff

Prof. Cveta Martinovska Bande, Ph.D.
Prof. Vlado Gicev, Ph.D.
Prof. Tatjana Atanasova - Pacemska, Ph.D.
Prof. Aleksandra Mileva, Ph.D.
Prof. Zoran Utkovski, Ph.D.
Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.
Prof. Saso Koceski, Ph.D.
Prof. Natasa Koceska, Ph.D.
Prof. Blagoj Delipetrov, Ph.D.
Ass. Prof. Igor Stojanovik, Ph.D.
Ass. Prof. Biljana Zlatanovska, Ph.D.
Ass. Prof. Aleksandar Krstev, Ph.D.
Ass. Prof. Natasa Stojkovik, Ph.D.
Ass. Prof. Done Stojanov, Ph.D.
Ass. Prof. Martin Lukarevski, Ph.D.

Managing/ Editor in chief

Ass. Prof. Biljana Zlatanovska, Ph.D.

Language editor

Danica Gavrilovska-Atanasovska
(macedonian language)
Snezana Kirova
(english language)

Technical editor

Slave Dimitrov
Blagoj Mihov

Address of the editorial office

Goce Delcev University – Štip
Faculty of Computer Science
Krste Misirkov 10-A
PO box 201, 2000 Štip,
R. of Macedonia

СОДРЖИНА

Мирјана КОЦАЛЕВА, Александра РИСТЕСКА ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА НА ЕДНО – ДИМЕНЗИОНАЛНАТА БРАНОВА РАВЕНКА	5
Aleksandar KRSTEV, Boris KRSTEV MATHEMATICAL MODELING AND USING OF THE MATLAB DEVELOPED TOOLS FOR INDUSTRIAL PRODUCTION AND KINETIC FLOTATION MODELLING.....	13
Rumen TSANEV MARINOV, Diana KIRILOVA NEDELICHEVA STABILITY RESULTS FOR FIXED POINT ITERATION PROCEDURES	21
Мирјана КОЦАЛЕВА, Цвета МАРТИНОВСКА - БАНДЕ СПОРЕДБА НА АЛГОРИТМИ ЗА КЛАСИФИКАЦИЈА	27
Darko SEBOV, Ilija MIHAJLOV, Borjana ARSOVA, Zoran ZDRAVEV SERVICE FOR CONTROLLING HOUSEHOLD ELECTRICAL DEVICES THROUGH THE INTERNET.....	37
Rumen TSANEV MARINOV, Diana KIRILOVA NEDELICHEVA INVERSE FUNCTION THEOREM WITH STRONG METRIC REGULARITY	43

ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА НА ЕДНО – ДИМЕНЗИОНАЛНАТА БРАНОВА РАВЕНКА

Мирјана Коцалева¹, Александра Ристеска¹

¹ Факултет за Информатика, Универзитет „Гоце Делчев“, Штип
mirjana.kocaleva@ugd.edu.mk
aleksandra.risteska@ugd.edu.mk

Апстракт. Во овој труд ги разгледуваме парцијалните диференцијални равенки, а посебен акцент ставаме на хиперболичните равенки и на брановата равенка како посебен вид на овие равенки. Исто така користиме компјутерска симулација со која го прикажуваме проблемот на пропагирање на бран на конкретен нумерички модел. Користиме формулација на равенката на бранот изразена преку брзината, деформацијата и напонот. Со интегрирање на брзината во однос на времето, добиваме преместувања на просторните точки. Главната цел на ова истражување е да ги проучиме феномените кои се случуваат кога имаме Dirichlet гранични услови кога имаме пропагирање на бранот во форма на полу-синусен пулс.

Клучни зборови: хиперболични равенки, пропагирање на бран, брзина, деформација, напон.

PRACTICAL APPLICATION OF ONE – DIMENSIONAL WAVE EQUATION

Mirjana Kocaleva¹, Aleksandra Risteska¹

¹ Faculty of Computer Science, Goce Delcev University, Stip, Macedonia
mirjana.kocaleva@ugd.edu.mk
aleksandra.risteska@ugd.edu.mk

Abstract. In this paper we consider partial differential equations, with a special emphasis on hyperbolic equations and the wave equation as a special form of these equations. Also, we are using computer simulation of the wave propagation on a specific numerical model. We used formulation of the wave equation via the velocities, strains, and stresses. Integrating velocities in time, we obtained displacements at spatial points. The main goal in this paper is to study the phenomena occurring due to Dirichlet boundary conditions when we have propagation of the wave in the form of half-sine pulse.

Keywords: hyperbolic equation, wave propagation, velocity, stress, strain.

1. Вовед

Поголем дел од физичките проблеми (пренос на топлина, електромагнетна теорија, квантна механика и др.) се решаваат со примена на парцијални диференцијални равенки. Парцијалните диференцијални равенки произлегуваат од врската помеѓу различни физички и геометриски големини каде функцијата зависи од две или повеќе независни променливи, најчесто од времето t и од уште една друга или повеќе просторни променливи.

Овие равенки може да се поделат во три групи:

- елиптична $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Пример: Лапласова равенка)
- параболична $u_t = c^2 u_{xx}$ (Пример: Топлинска равенка)
- хиперболична $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (Пример: Бранова равенка)

Општите решенија на секој тип на равенка се разликуваат и затоа се разгледуваат граничните вредности (тоа се вредности на решението u , или некои од неговите изводи на граничната површина S , или граничната крива C во регионот) и почетните услови (кога времето $t=0$) како дополнителни услови при решавање на секој тип на равенка. Бидејќи најчесто за овие типови на равенки не постојат конкретни аналитички решенија, тие се решаваат нумерички (Bayliss et. al., 1980), (Chupa, 1998; Reimer et al., 2012), (Gicev & Trifunac, 2006).

Во овој труд ќе се задржиме на нумеричко решавање на проблемите со примена на брановата равенка како специјален претставник на хиперболичната равенка.

$$u_{tt} = u_{xx} \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \tag{3}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \tag{4}$$

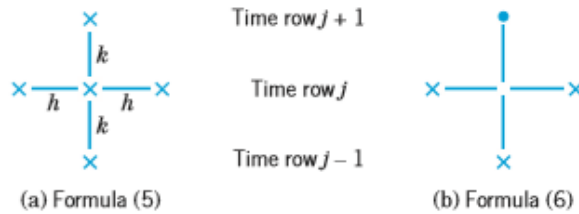
Равенките од (1) до (4) го претставуваат моделот на еластична вибрирачка жица со фиксни (неподвижни) крајни точки во $x = 0$ и $x = 1$. Ако ги замениме изводите со конечните разлики во (1), ќе ја добиеме равенката

$$\frac{1}{k^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \tag{5}$$

каде h е големина на интервалот од мрежата во x -правец и k е големина на интервалот на мрежата во t -правец. Формулата (5) ги вклучува петте точки прикажани на слика 1. Се бира $r = \frac{k^2}{h^2} = 1$ и u_{ij} отпаѓаат и ја добиваме равенката (6)

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \tag{6}$$

Треба да имаме во предвид дека равенката (6) ги вклучува трите временски чекори $j - 1, j, j + 1$.



Слика 1 Мрежните точки користени во равенките (5) и (6)
Figure 1 Mesh points used in (5) and (6)

Од формулата (3) $u_t(x, 0) = g(x)$ ја изведуваме формулата (7)

$$\frac{1}{2k}(u_{i1} - u_{i,-1}) = g_i \tag{7}$$

оттука $u_{i,-1} = u_{i1} - 2kg_i$ каде $g_i = g(ih)$. За $t = 0$ и $j = 0$ равенката (6) е

$$u_{i1} = u_{i-1,0} + u_{i+1,0} - u_{i,-1}$$

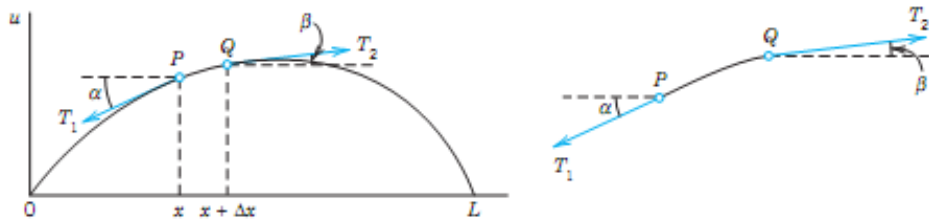
Ако од оваа равенка се одземе $u_{i,-1}$ се добива $u_{i1} = u_{i-1,0} + u_{i+1,0} - u_{i1} + 2kg_i$ и со поедноставување на равенката се добива

$$u_{i1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,0} + u_{i+1,0}) + kg_i \tag{8}$$

Со оваа равенка се претставува u_{i1} со почетните услови, потоа за наредните пресметки се користи равенката (6).

2. Бранова равенка

Како прва важна парцијална диференцијална хиперболична равенка, ја разгледуваме равенката која важи за мали трансверзални вибрации на еластична нишка, како што е жицата од виолина. Нишката ја поставуваме паралелно над x -оската растегната по должина L , и зацврстена на краевите $x = 0$ и $x = L$. Потоа и вршиме дисторзија и во некој момент на времето, на пример, $t = 0$, ја отпуштаме и овозможуваме таа да вибрира. Целта овде е да се определат вибрациите на жицата и да се најде нејзиното отклонување $u(x, t)$ во некоја точка x и во некое време $t > 0$; (слика 2).



Слика 2 Отклонување на жицата во фиксно време t (превземено од Kreyszig, 1999)
Figure 2 Deflected string at fixed time t (redrawn from Kreyszig, 1999)

Всушност, $u(x, t)$ ќе биде решение на парцијалната диференцијална равенка. За да може оваа равенка да се реши се прават следните претпоставки.

- Масата на жицата по единица должина е константна. Жицата е перфектно еластична и не прави никаков отпор при модификации.
- Тензијата предизвикана од растегнувањето на жицата пред нејзиното фиксирање на краевите е толку голема така што акцијата на гравитационата сила на жицата може да биде запоставена.
- Жицата прави мали трансверзални движења во вертикалната рамнина, секоја честичка од жицата се движи строго вертикално и поради тоа отклонувањето и падината во секоја точка од жицата секогаш остануваат мали.

За да се изведе диференцијалната равенка ги земаме во предвид силите кои делуваат на мали делови на жицата (слика 2). Бидејќи жицата не дава отпор при свиткување, силата на затегнување е тангента на кривата на жицата во секоја точка. Нека T_1 и T_2 се сили на затегнување во крајните точки P и Q на таа област. Бидејќи точките на жицата се движат вертикално, не постојат движења во хоризонтален правец. Оттука хоризонталните компоненти на силите на затегнување мора да бидат константни. Користејќи ја нотацијата од слика 2, добиваме:

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = \text{const} \quad (9)$$

Во вертикален правец постојат две сили, наречени вертикални компоненти $-T_1 \sin \alpha$ и $T_2 \sin \beta$ за T_1 и T_2 ; овде минус знакот се појавува бидејќи компонентата во P е со правец надолу. Според вториот Њутнов закон резултатот од тие две сили е еднаков на масата $\rho \Delta x$ на областа помножена со забрзувањето $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, оценето на некоја точка помеѓу x и $x + \Delta x$, каде ρ е масата на неотклонетата жица по единица должина и Δx е должината на областа на неотклонетата жица. Оттука :

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Со употреба на (9), можеме да го поделиме ова со $T_2 \cos \beta = T_1 \cos \alpha = T$ со што добиваме:

$$\frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10)$$

Сега $\tan \alpha$ и $\tan \beta$ се наклони на жицата во x и $x + \Delta x$:

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_x \quad \text{и} \quad \tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+\Delta x}.$$

Овде треба да ги напишеме парцијалните изводи, бидејќи u исто така зависи од времето t . Со делење на (10) со Δx добиваме

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ако Δx се приближува кон нула, ја добиваме линеарната парцијална диференцијална равенка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \quad (11)$$

Ова е така наречената едно - димензионална равенка на бран, која го решава нашиот проблем. Гледаме дека таа е хомогена и од втор ред. За физичката константа T/ρ можеме да пишеме c^2 (наместо c) за да покажеме дека оваа константа е позитивна. Едно - димензионална значи дека равенката вклучува само една просторна променлива x .

3. Практична примена на брановата равенка (моделот)

Равенката која го опишува нашиот проблем е едно - димензионалната бранова равенка претставена со равенка (12)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (12)$$

За да ја разгледуваме оваа равенка треба да ја дефинираме брзината на ширење на бранот $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ каде μ го претставува модулот на лизгање на материјалот, а ρ е густината на материјалот од кој е направена прачката. μ и ρ се всушност параметри кои се различни и карактеристични за секој материјал од која е направена прачката. Големината $\sigma = \mu \varepsilon$ го претставува тангенцијалниот напон при ширење на бранот, а ε е деформацијата при ширење на бранот.

За да ја востановиме итеративната постапка, равенката (12) ја претставуваме како систем од парцијални диференцијални равенки од прв ред прво преку брзината на поместување, а потоа и преку деформацијата (v ја претставува брзината, ε ја претставува деформација).

Прво, ако за брзината земеме дека $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ и замениме во равенката (12) се добива

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \varepsilon) = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad (13 \text{ a})$$

Потоа ако двете страни на идентитетот $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$ ги диференцираме по x се добива $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ или $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$. Ако во последната равенка за ε замениме $\varepsilon = \frac{\partial v}{\partial x}$ ќе ја добиеме равенката

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (13 \text{ б})$$

Равенките 13 а и 13 б можеме да ги претставиме како вектори на следниов начин $\{U\}_{it} = \{F\}_{ix}$ или $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}$ каде $U = \begin{Bmatrix} V \\ \varepsilon \end{Bmatrix}$ и $F = \begin{Bmatrix} \mu \varepsilon \\ \rho v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ V \end{Bmatrix}$.

Векторот U во точка i и време $(j + 1)\Delta t$ е

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \Delta t \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{i,j} + \dots$$

Ако $\frac{\partial U}{\partial t}$ го замениме со $\frac{\partial F}{\partial x}$ добиваме

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i,j} + \dots$$

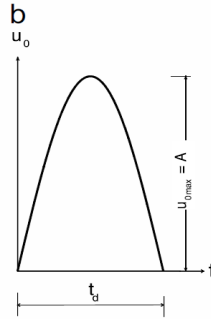
$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)$ овој дел од равенството можеме да го запишеме како $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)$ каде $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = A(U) * \frac{\partial U}{\partial t}$ или

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\rho \partial v} & \frac{\partial \sigma}{\rho \partial \varepsilon} \\ \frac{\partial v}{\partial v} & \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \sigma}{\rho \partial \varepsilon} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\frac{\partial \sigma}{\rho \partial v} = 0$ и $\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = 0$ затоа што σ не зависи од v . Оттука за $U_{i,j+1}$ добиваме

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(A(U) * \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i,j} + \dots$$

За влезна побуда во нашиот пример земаме полусинусоиден пулс (сл.3) U_{0max} претставува амплитуда, а t_d времетраење на пулсот. $U_0 = \begin{cases} A * \sin \frac{\pi t}{t_d}, & t \leq t_d \quad (14a) \\ 0, & t > t_d \quad (14b) \end{cases}$.



Слика 3 Влезна побуда
Figure 3 Incident excitation

Нашиот проблем е со употреба на брановата равенка да се пресмета поместувањето во секоја точка x во секое време t на еднодимензионален медиум-прачка. Прачката е поделена на 200 еднакви просторни интервали. Со секое поместување прачката вибрира. Во секоја точка ја пресметуваме централната конечна разлика преку формулите (14) и (15)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_l) \approx \frac{u_{i-1}^l - 2u_i^l + u_{i+1}^l}{\Delta x^2} \quad (14)$$

$$\text{и } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_l) \approx \frac{u_i^{l-1} - 2u_i^l + u_i^{l+1}}{\Delta t^2} \quad (15)$$

каде $x_i = (i - 1)\Delta x, i = 1, \dots, n$ и $x_l = l\Delta t, l = 0, 1, \dots$. Ако замениме во равенката (12) добиваме $\frac{u_i^{l-1} - 2u_i^l + u_i^{l+1}}{\Delta t^2} = \gamma^2 \frac{u_{i-1}^l - 2u_i^l + u_{i+1}^l}{\Delta x^2}$. За u_i^{l+1} равенката го добива обликот $u_i^{l+1} = 2u_i^l - u_i^{l-1} + C^2(u_{i-1}^l - 2u_i^l + u_{i+1}^l)$ за $C = \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

4. Резултати

Брзината на ширење на бранот изнесува $\beta = 300 \text{ m/s}$, амплитудата е $A=0.1\text{m}$ и времетраењето на пулсот $t_d=0.1\text{s}$. Поместувањето како функција од просторот x се добива од (14a) како

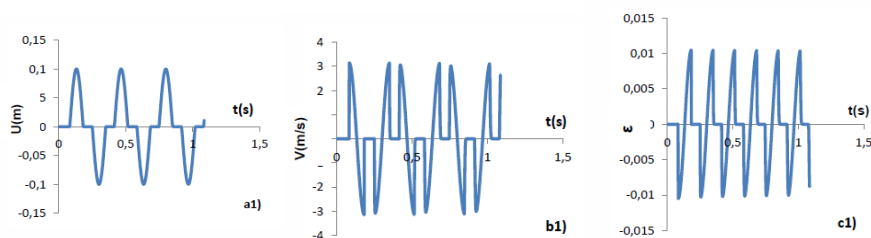
$$u = A \sin \frac{\pi t \beta}{t_d \beta} = A \sin \frac{\pi x}{t_d \beta} \quad (16)$$

Диференцирајќи ја (16) по x , се добива:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\pi A}{\beta t_d} \cos \frac{\pi x}{t_d \beta} \quad (16a)$$

Оттука за максималната вредност на деформацијата ε имаме дека е еднаква на $\varepsilon = \frac{\pi \cdot 0.1}{300 \cdot 0.1} \sim 0.01$.

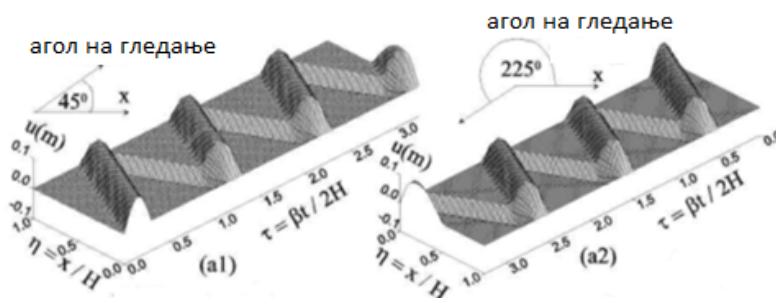
Овој проблем го решаваме програмски со употреба на Fortran програмскиот јазик. На слика 4 се претставени резултатите добиени од нумеричка симулација на ширење на бранот во форма на полу-синусен пулс во средната точка $x = \frac{H}{2}$ наспроти времето за $\beta = 300\text{m/s}$.



Слика 4 Графички приказ на решението (поместување, брзината и деформацијата) во точка на средина од прачката, $x = H/2$ во функција од времето
Figure 4 Graphical representation of the solution (displacement, velocity and strain) at the point on the middle of the beam, $x = H/2$ versus time

На слика 4 е даден графички приказ на решението во средината на прачката кога имаме 100 точки и $x = H/2$ или 25m. Прикажани се поместувањето u , брзината v и деформацијата ϵ во зависност од времето, t . Приказот е даден за фиксни (неподвижни) граници, кога $U = 0$ на дното, $x=0$ и на врвот $x = H = 50$ м (Dirichlet гранични услови, слика 4a1, 4b1 и 4c1). Во ваков случај кога имаме фиксни (неподвижни) граници, по рефлексијата пулсот го менува знакот и во средината на прачката (во точката 100) доаѓа со спротивно (негативно) поместување во однос на првиот премин преку таа точка (вториот врв на сл. 4a1 е со негативен знак). Ситуацијата е иста и кај брзината (слика 4b1). За разлика од брзината и поместувањето, деформацијата после рефлексијата не го менува знакот т.е. сите полу - косинусни бранови (слика 4c1) започнуваат со негативен и завршуваат со позитивен знак.

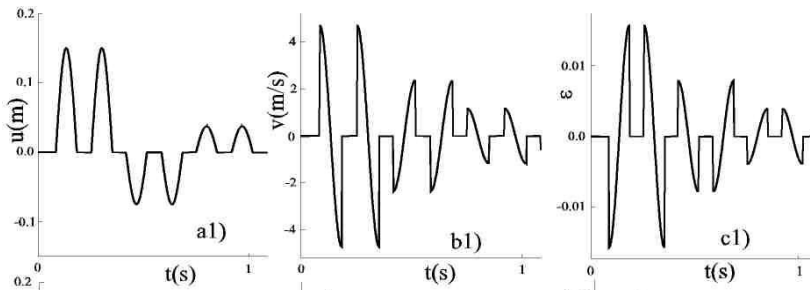
Од ова гледаме дека кога имаме фиксни (неподвижни) крајни точки (Dirichlet гранични услови) по рефлексијата се менува знакот на поместување u и брзината v , додека знакот на деформацијата ϵ не се менува. После повеќе рефлексии, амплитудите на пулсот се исти.



Слика 5 Поместување на прачката гледано од два визуелни агли
Figure 5 Moving the beam from two visual angle

Претходната анализа или поместувањето на прачката наспроти времето и просторот е претставена на слика 5 преку 3Д преглед и гледана од два агли од 45 и 225 степени.

На слика 6 (a1, b1 и c1) се прикажани поместувањето, брзината и деформацијата во средината на прачката кога $x = H/2 = 25$ (во точка 100), наспроти времето во случаи кога долната граница се поместува (не е фиксна). Како последица на поместување на долната граница по секое рефлектирање од дното, дел од енергијата на бранот се пренесува во тлото и само дел се рефлектира назад во прачката кој се пропагира нагоре. На овој начин, по секое рефлектирање на бранот на контактот прачка-тло, бранот кој останува во прачката ослабува.



Слика 6 Поместувањето, брзината и деформацијата во случај кога долната граница не е фиксна
Figure 6 Displacement, particle velocity, and strain in case of moving boundary at bottom

5. Заклучок

За вредности $0 \leq r^* \leq 1$ за параметарот $r^* = \frac{k^2}{h^2}$ овој експлицитен модел е стабилен, па така од равенката (6) можеме да очекуваме прифатлив резултат за почетните податоци кои немаат прекин (дисконтинуитет). Исто така заклучуваме дека при фиксни краеве (Dirichlet гранични услови) по рефлексija знакот на поместувањето, u и брзината, v се менува, додека пак знакот на деформацијата ϵ не се менува. Во случај кога немаме фиксна граница по секое рефлектирање на бранот дел од енергијата на бранот се рефлектира во тлото и големината на брановите се намалува.

Користена литература

- [1] Risteska, A and Gicev, V and Zlatev, Z and Kokalanov, V. (2013) *The response of a shear beam as 1d medium to seismic excitations dependent on the boundary conditions*. In: XI Balkan Conference on Operation Research, 7-11 Sept 2013, Belgrade & Zlatibor, Serbia.
- [2] Chupa, M.A. *Numerical Techniques for Solving the One-Dimensional Heat Equation Numerical Analysis*, 2, 1998.
- [3] Gicev, V and Trifunac, M. (2007) Permanent deformations and strains in a shear building excited by a strong motion pulse. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27 (8). pp. 774-792.
- [4] Gicev, V. and Trifunac, M. (2006) *Non-linear earthquake waves in seven-storey reinforced concrete hotel*, NISEE, Pacific Earthquake Engineering (PEER) Center, Univ. of California, Berkeley.
- [5] Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics*, 8th edition, 1999
- [6] Knut A. Lie. *The Wave Equation in 1D and 2D*, 2005