



УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ - ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

ISSN:1857-8691

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2013
YEARBOOK
2013

ГОДИНА 2

VOLUME II

GOCE DELCEV UNIVERSITY - STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА



ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2013
YEARBOOK
2013

ГОДИНА 2

МАРТ, 2014

VOLUME II

GOCE DELCEV UNIVERSITY – STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

**ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА
YEARBOOK
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE**

За издавачот:

Проф д-р Владо Гичев

Издавачки совет

Проф. д-р Саша Митрев
Проф. д-р Лилјана Колева - Гудева
Проф. д-р Владо Гичев
Проф. д-р Цвета Мартиновска
Проф. д-р Татајана Атанасова - Пачемска
Доц. д-р Зоран Здравев
Доц. д-р Александра Милева
Доц. д-р Сашо Коцески
Доц. д-р Наташа Коцеска
Доц. д-р Зоран Утковски
Доц. д-р Игор Стојановиќ
Доц. д-р Благој Делипетров

Редакциски одбор

Проф. д-р Цвета Мартиновска
Проф. д-р Татајана Атанасова - Пачемска
Доц. д-р Наташа Коцеска
Доц. д-р Зоран Утковски
Доц. д-р Игор Стојановиќ
Доц. д-р Александра Милева
Доц. д-р Зоран Здравев

Главен и одговорен уредник

Доц. д-р Зоран Здравев

Јазично уредување

Даница Гавриловска - Атанасовска
(македонски јазик)
Павлинка Павлова-Митева
(англиски јазик)

Техничко уредување

Славе Димитров
Благој Михов

Редакција и администрација
Универзитет „Гоце Делчев“ - Штип
Факултет за информатика
ул. „Крсте Мисирков“ 10-А
п. фах 201, 2000 Штип
Р. Македонија

Editorial board

Prof. Saša Mitrev, Ph.D.
Prof. Liljana Koleva - Gudeva, Ph.D.
Prof. Vlado Gicev, Ph.D.
Prof. Cveta Martinovska, Ph.D.
Prof. Tatjana Atanasova - Pacemska, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.
Ass. Prof. Aleksandra Mileva, Ph.D.
Ass. Prof. Saso Koceski, Ph.D.
Ass. Prof. Natasa Koceska, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Utkovski, Ph.D.
Ass. Prof. Igor Stojanovik, Ph.D.
Ass. Prof. Blagoj Delipetrov, Ph.D.

Editorial staff

Prof. Cveta Martinovska, Ph.D.
Prof. Tatjana Atanasova - Pacemska, Ph.D.
Ass. Prof. Natasa Koceska, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Utkovski, Ph.D.
Ass. Prof. Igor Stojanovik, Ph.D.
Ass. Prof. Aleksandra Mileva, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.

Managing/ Editor in chief

Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.

Language editor

Danica Gavrilovska-Atanasovska
(macedonian language)
Pavlinka Pavlova-Miteva
(english language)

Technical editor

Slave Dimitrov
Blagoj Mihov

Address of the editorial office

Goce Delcev University – Stip
Faculty of Computer Science
Krstе Misirkov 10-A
PO box 201, 2000 Stip,
R. of Macedonia

**СОДРЖИНА
CONTENT**

CALCULATION OF MULTI-STATE TWO TERMINAL RELIABILITY Natasha Stojkovic, Limonka Lazarova and Marija Miteva	5
INCREASING THE FLEXIBILITY AND APPLICATION OF THE B- SPLINE CURVE Julijana Citkuseva, Aleksandra Stojanova, Elena Gelova	11
WAVELET APPLICATION IN SOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS USING GALERKIN METHOD Jasmina Veta Buralieva, Sanja Kostadinova and Katerina Hadzi-Velkova Saneva	17
ПРОИЗВОДИ НА ДИСТРИБУЦИИ ВО КОЛОМБООВА АЛГЕБРА Марија Митева, Билјана Јолевска-Тунеска, Лимонка Лазарова	27
ПРИМЕНА НА CRANK-NICOLSON МЕТОДОТ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ТОПЛИНСКИ РАВЕНКИ Мирјана Коцалева, Владо Гичев	35
S-BOXES – PARAMETERS, CHARACTERISTICS AND CLASSIFICATIONS Dusan Bikov, Stefka Vouyuklieva and Aleksandra Stojanova	47
ПРЕБАРУВАЊЕ ИНФОРМАЦИИ ВО ЕРП СИСТЕМИ: АРТАИИС СТУДИЈА НА СЛУЧАЈ Ѓорѓи Гичев, Ана Паневска, Ивана Атанасова, Зоран Здравев, Цвета Маргиновска-Банде, Јован Пехчевски	53
ЕДУКАТИВНО ПОДАТОЧНО РУДАРЕЊЕ СО MOODLE 2.4 Зоран Милевски, Зоран Здравев	65
ПРЕГЛЕД НА ТЕХНИКИ ЗА ПРЕПОЗНАВАЊЕ НА ЛИК ОД ВИДЕО Ана Љуботенска, Игор Стојановиќ	77
ИНТЕРНЕТ АПЛИКАЦИЈА ЗА ОБРАБОТКА НА СЛИКИ СО МАТРИЧНИ ТРАНСФОРМАЦИИ Иван Стојанов, Ана Љуботенска, Игор Стојановиќ, Зоран Здравев	85
УТАУТ И НЕЈЗИНАТА ПРИМЕНА ВО ОБРАЗОВНА СРЕДИНА: ПРЕГЛЕД НА СОСТОЈБАТА Мирјана Коцалева, Игор Стојановиќ, Зоран Здравев	95

ПРИМЕНА НА CRANK-NICOLSON МЕТОДОТ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ТОПЛИНСКИ РАВЕНКИ

Мирјана Коцалева¹, Владо Гичев¹

¹ Факултет за информатика, Универзитет „Гоце Делчев“, Штип
(mirjana.kocaleva, vlado.gicev}@ugd.edu.mk

Апстракт. Во овој труд разгледуваме еднодимензионален (1-Д) проблем на трансфер на топлина низ прачка. Иницијално прачката е загреана по должина, а на краевите температурата се одржува на нула во тек на време. Проблемот се опишува со парцијална диференцијална равенка која ја решаваме нумерички со Crank-Nicolson методот.

Од решението може да се види како во тек на време прачката се лади при што температурата по цела должина на прачката асимптотски се приближува кон нула. Во овој труд, ние го истражуваме влијанието на дискретизацијата (sampling) на точноста на решението со Crank-Nicolson методот.

Клучни зборови: парцијални равенки, параболични равенки, Crank-Nicolson метод

APPLICATION OF THE CRANK-NICOLSON METHOD FOR SOLVING HEAT EQUATIONS

Mirjana Kocaleva¹, Vlado Gicev¹

¹Faculty of computer science, Goce Delcev University, Stip, Macedonia
(mirjana.kocaleva, vlado.gicev}@ugd.edu.mk

Abstract. In this paper we consider one-dimensional (1 - D) problem of heat transfer through the rod. Initially the rod is heated longitudinally and the ends are maintained at zero temperature over time. The problem is governed by a partial differential equation which is solved numerically by Crank-Nicolson method.

From the solution it can be seen that as time elapsing the rod is cooling whereby the temperature of the rod asymptotically approaches zero. In this paper, we investigate what is the impact of sampling on the accuracy of the solution of Crank-Nicolson method.

Kew words: partial equations, parabolic equations, Crank-Nicolson method.

1. Вовед

Природните и инженерски феномени се опишуваат со диференцијални равенки. Еден мал дел од нив се опишуваат со обични, а многу поголем број со парцијални диференцијални равенки. Само за мал број парцијални диференцијални равенки со специјални иницијални и гранични услови постојат затворени, аналитички решенија. Поради непостоење на аналитички решенија, истражувањата на физичките феномени се врши со примена на математичко моделирање и нумеричка анализа. Така авторите предлагаат нумерички шеми и методи за решавање на елиптични 4,7,8,9, параболични 1,4,5,6,8,9 и хиперболични 2,3,8,9 парцијални диференцијални равенки.

Равенката која го опишува нашиот проблем е еднодимензионалната топлинска равенка

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad (c \text{ е константа}). \quad (0)$$

Оваа равенка обично се користи за x во фиксни интервали $0 \leq x \leq L$ и време $t \geq 0$, пропишана почетна температура $u(x,0) = f(x)$ (f е дадено) и гранични услови во $x=0$ и $x=L$ за сите $t \geq 0$. Претпоставуваме дека $c=1$ и $L=1$; ова секогаш може да се оствари со линеарна трансформација на x и t . Тогаш топлинската равенка и условите се

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1 \quad t \geq 0 \quad (1)$$

во внатрешноста на доменот

$$u(x,0) = f(x) \quad (2)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (3)$$

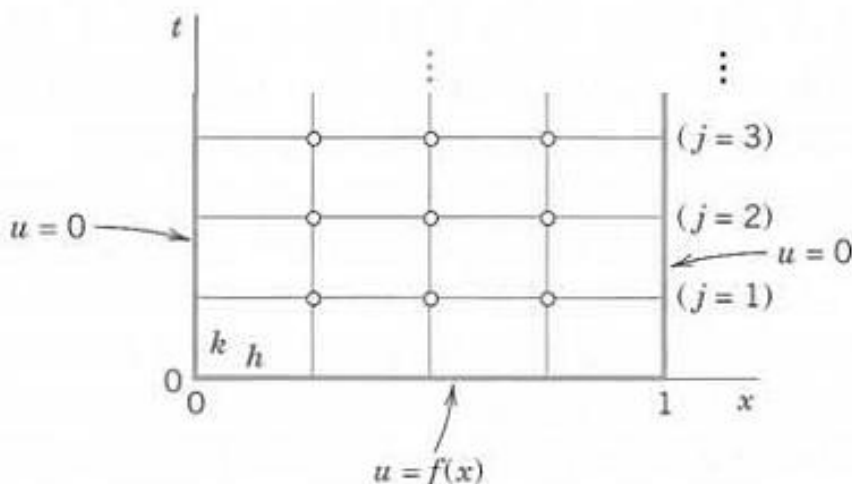
каде (2) се почетни услови, а (3) се гранични услови.
Апроксимацијата на (1) со конечни разлики е

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \quad (4)$$

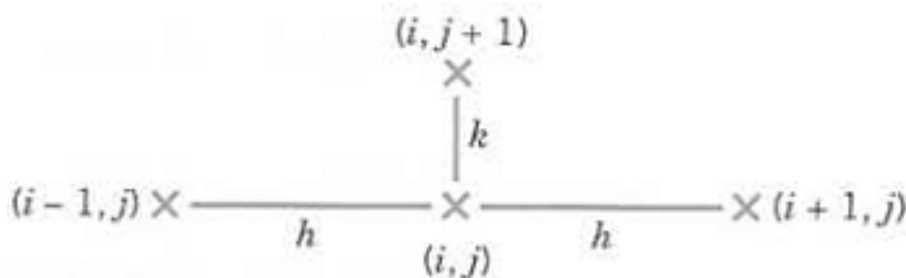
Слика 1 ја покажува соодветната мрежа и мрежните точки. Просторните инкременти се h во x -правец и k во t -правец. Формулата (4) ги вклучува четирите точки прикажани на слика 2. На лево користиме конечна разлика напред бидејќи немаме информација за негативно x на почетокот. Од (4) го пресметуваме $u_{i,j+1}$ кој одговара на временскиот ред $j+1$, во однос на другите три кои одговараат на временскиот ред j ; решавајќи го (4) за $u_{i,j+1}$ добиваме

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \quad (5)$$

каде $r = \frac{k}{h^2}$.



Слика 1 Мрежа и мрежни точки кои одговараат на равенките (4) и (5)
Figure 1 Network and networked points corresponding to equations (4) and (5)



Слика 2 Четирите точки во равенките (4) и (5)
Figure 2 The four points in equations (4) and (5)

Пресметките со овој експлицитен метод базирани на (5) се едноставни. Сепак, може да се покаже дека клучно за конвергенција на овој метод е условот

$$r = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}, \quad (6)$$

тоа е бидејќи u_{ij} има позитивен коефициент во (5) или (за $r = \frac{1}{2}$) ќе биде отсутен од (5). Интуитивно (6) значи дека не треба да одиме брзо во t-насоката. Пример е даден подолу.

1.1. Crank-Nicolson метод

Условот (6) не е многу ефикасен во пракса. Всушност, за да се постигне доволна точност, треба да се избере h мало, што го прави и k многу мало од (6). Ако $h=0.1$ тогаш $k \leq 0.005$. Префрлањето на $1/2 h$ четирикратно го зголемува бројот на временски чекори потребни за да се постигне одредена t-вредност.

Метод кој не наметнува ограничувања на $r = \frac{k}{h^2}$ е Crank-Nicolson методот [1] кој користи вредности на u во шест точки на слика 3. Идејата на методот е замена на разликата количник на десната странана (4) со $\frac{1}{2}$ пати од збирот на двата различни количници во двата временски реда. Наместо (4) имаме

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \quad (7)$$

Со множење со $2k$ и запишување на $r = \frac{k}{h^2}$, ги собираме условите кои одговараат на временскиот ред $j+1$ од лево и условите кои одговараат на временскиот ред j од десно:

$$(2 + 2r)u_{i,j+1} - r(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (2 - 2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}). \quad (8)$$

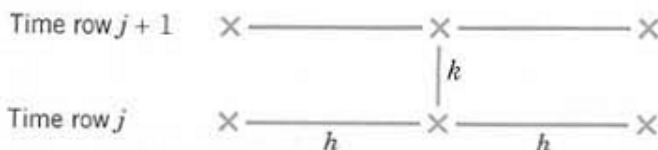
Генерално, трите вредности на лево се непознати, додека трите вредности на десно се познати.

Ако го поделиме x -интервалот $0 < x < 1$ во (1) на n еднакви интервали, имаме $n-1$ внатрешни мрежни точки за временски ред. Тогаш за $j=0$ и $i=1, \dots, n-1$, формулата (8) дава линеарен систем од $n-1$ равенки за $n-1$ непознати вредности $u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{n-1,1}$ во првиот временски ред во однос на првичните вредности $u_{0,0}, u_{1,0}, \dots, u_{n,0}$ и граничните вредности $u_{0,1}, u_{n,1} (=0)$.

Слично за $j=1, j=2, \dots$ односно за секој временски ред треба да решиме систем од $n-1$ линеарни равенки кои произлегуваат од (8).

Иако $r = \frac{k}{h^2}$ не наметнува ограничувања, помал r ќе дава подобар резултат. Во пракса, се избира k со која може да се зачува значителна сума на работа, без правење на r многу големо. Често добар избор за r е $r=1$. Тогаш (8) станува поедноставен.

$$4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} \quad (9)$$



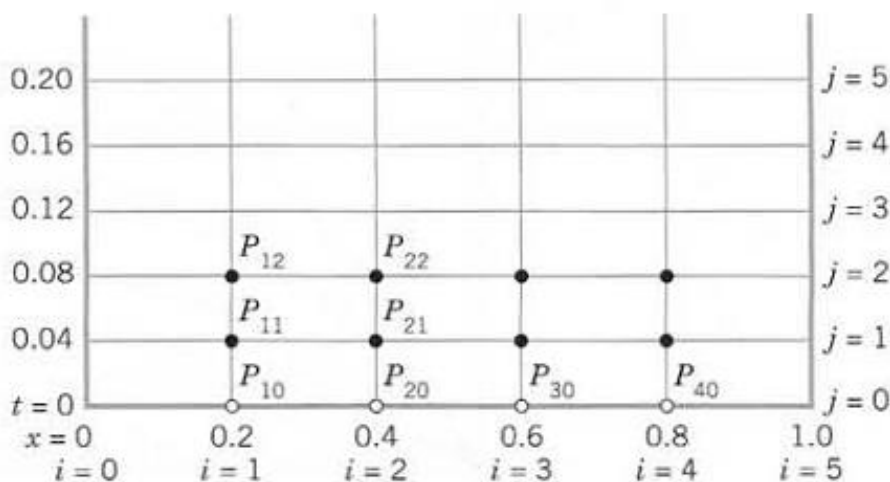
Слика 3 Шесте точки во Crank-Nicolson формулите (7) и (8)
Figure 3. Six points in the Crank-Nicolson formula (7) and (8)

2. Математички модел

Разгледуваме странично изолирана метална шипка со должина 1 и таква што $c^2=1$ во топлинската равенка (0). Претпоставуваме дека краевите на шипката се чуваат на температура $u=0^\circ\text{C}$ и дека температурата на шипката во одреден момент $t=0$ е $f(x) = \sin\pi x$ [1]. Се применува Crank-Nicolson методот со $h=0.2$ и $r=1$. Ја наоѓаме температурата $u(x,t)$ во шипката за време t во интервал $0 \leq t \leq 0.2$.

Исто така треба да се примени методот т.е. равенката (5) со r кој го задоволува условот од равенката (6) т.е. $r=0.25$ и со незадоволителни вредности (6) $r=1$ и $r=2.5$.

Овој пример ќе биде решен и со експлицитниот метод за да се направи споредба на двете добиени решенија.



Слика 4 Мрежата на нашиот проблем
Figure 4 Network of our problem

Бидејќи $r=1$, формулата (8) ја добива формата (9). Бидејќи $h=0.2$ и $r = \frac{k}{h^2}=1$, тогаш,

$$k=h^2=0.04.$$

Оттука треба да решиме пет чекора. Потребни ни се почетни вредности. Нив ги добиваме со решавање на равенката $f(x) = \sin \pi x$ и имаме

$$u_{10}=0.587785=u_{40} \text{ и} \\ u_{20}=0.951057=u_{30}$$

(u_{10} значи u во P_{10} на слика 4). Во секој временски ред има 4 внатрешни мрежни точки. Оттука во секој временски чекор ќе имаме да решиме четири равенки со четири непознати. Но бидејќи почетната температура има симетрична дистрибуција со однос $x=0.5$ и $u=0$ на двата краја за сите t , имаме $u_{31}=u_{21}$, $u_{41}=u_{11}$ во првиот временски ред и соодветно за другите редови. Ова го намалува секој систем до две равенки со две непознати. Од (9), бидејќи $u_{31}=u_{21}$ и $u_{01}=0$, за $j=0$ овие равенки се

$$(i=1)4u_{11} - u_{21} = u_{00} + u_{20} = 0.951057 \\ (i=2)-u_{11} + 4u_{21} - u_{21} = u_{10} + u_{20} = 1.538842$$

Решението е $u_{11}=0.399274$, $u_{21}=0.646039$. Слично за $j=1$ го имаме системот

$$4u_{12} - u_{22} = u_{01} + u_{21} = 0.646039 \quad \text{за } i=1 \\ -u_{21} + 3u_{22} = u_{11} + u_{21} = 1.045313 \quad \text{за } i=2$$

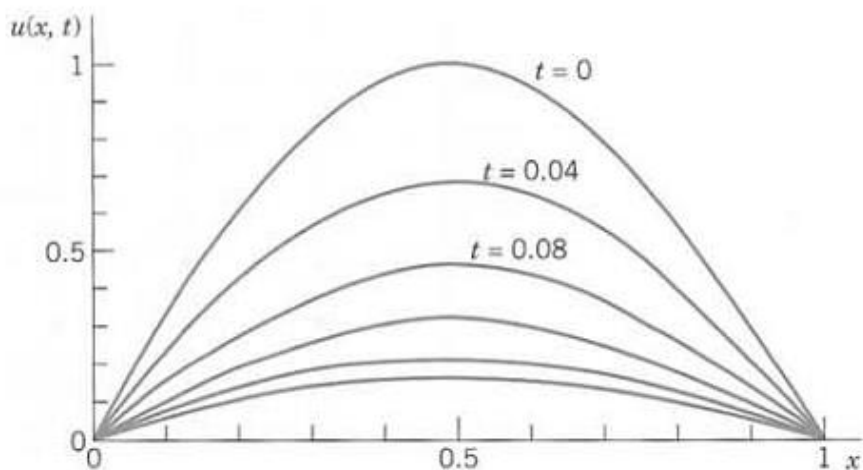
Решението е $u_{12}=0.271221$, $u_{22}=0.438844$ и.т.н.

На слика 5 се прикажани сите решенија на овој проблем,

t	$x = 0$	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$	$x = 1$
0.00	0	0.588	0.951	0.951	0.588	0
0.04	0	0.399	0.646	0.646	0.399	0
0.08	0	0.271	0.439	0.439	0.271	0
0.12	0	0.184	0.298	0.298	0.184	0
0.16	0	0.125	0.202	0.202	0.125	0
0.20	0	0.085	0.138	0.138	0.085	0

Слика 5 Сите решенија на проблемот
Figure 5 All the solutions of the problem

додека пак на слика 6 е прикажана температурната распределба $u(x, t)$ каде времето t е дадено во вид на параметар. Температурната распределба по должина на прачката е прикажана во временски инстанци $t = 0; 0.04s; 0.08s; 0.12s; 0.16s; 0.20s$



Слика 6 Температурна распределба по должина на прачката
Figure 6 Temperature distribution along the rod

2.1. Решение на проблемот со експлицитниот метод (5) со $r=0.25$

Од $h=0.2$ и $r = \frac{k}{h^2}=0.25$ за k имаме $k=rh^2=0.25*0.04=0.01$. Оттука треба да извршиме 4 пати повеќе чекори отколку со Crank-Nicolson методот. Формула (5) со $r=0.25$ е

$$u_{i,j+1} = 0.25(u_{i-1,j} + 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \tag{10}$$

И овде можеме да користиме симетрија. За $j=0$ ни требаат $u_{00}=0, u_{10}=0.587\ 785, u_{20}=u_{30}=0.951\ 057$ и пресметуваме

$$u_{11} = 0.25(u_{00} + 2u_{10} + u_{20}) = 0.531\ 657$$

$$u_{21} = 0.25(u_{10} + 2u_{20} + u_{30}) = 0.25(u_{10} + 3u_{20}) = 0.860\ 239$$

Секако можеме да ги изоставиме граничните услови $u_{01}=0, u_{02}=0, \dots$ од формулата. За $j=1$ имаме

$$u_{12} = 0.25(2u_{11} + u_{21}) = 0.480\ 888$$

$$u_{22} = 0.25(u_{11} + 3u_{21}) = 0.778\ 049 \text{ и т.н.}$$

Треба да извршиме 20 чекори, но нумеричките вредности покажуваат дека точноста е иста со Crank-Nicolson вредностите CN (точните вредности се дадени со три децимали):

t	x = 0.2			x = 0.4		
	CN	By (11)	Exact	CN	By (11)	Exact
0.04	0.399	0.393	0.396	0.646	0.637	0.641
0.08	0.271	0.263	0.267	0.439	0.426	0.432
0.12	0.184	0.176	0.180	0.298	0.285	0.291
0.16	0.125	0.118	0.121	0.202	0.191	0.196
0.20	0.085	0.079	0.082	0.138	0.128	0.132

Слика 7 Табела со точни вредности
Figure 7 Table with the correct values

2.2. Неуспех на равенката на Crank-Nicolson методот т.е. на равенката (5) поради нарушени вредности на r (равенка (6))

Формулата (5) $u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$ со $h=0.2$ и $r=1$ што ја нарушува (6) е $u_{i,j+1} = u_{i-1,j} - u_{ij} + u_{i+1,j}$

и дава многу мали вредности:

t	$x = 0.2$	Exact	$x = 0.4$	Exact
0.04	0.363	0.396	0.588	0.641
0.12	0.139	0.180	0.225	0.291
0.20	0.053	0.082	0.086	0.132

Слика 8 Формула (5) дава мали вредности
Figure 8 Formula (5) gives small values

Додека пак формулата (5) со големи вредности за r , на пример за $r=2.5$, дава комплетно бесмислен резултат.

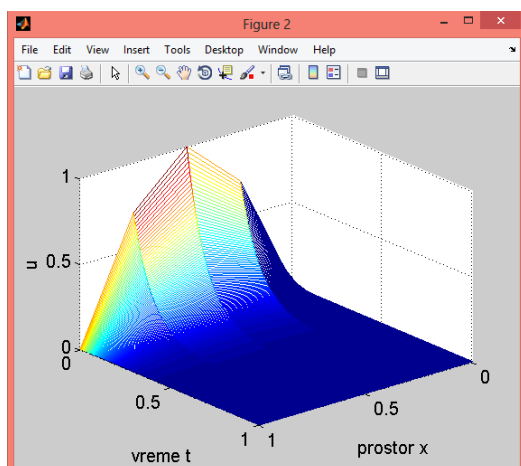
t	$x = 0.2$	Exact	$x = 0.4$	Exact
0.1	0.0265	0.2191	0.0429	0.3545
0.3	0.0001	0.0304	0.0001	0.0492

Слика 9 Формула (5) дава бесмислен резултат
Figure 9 Formula (5) gives senseless result

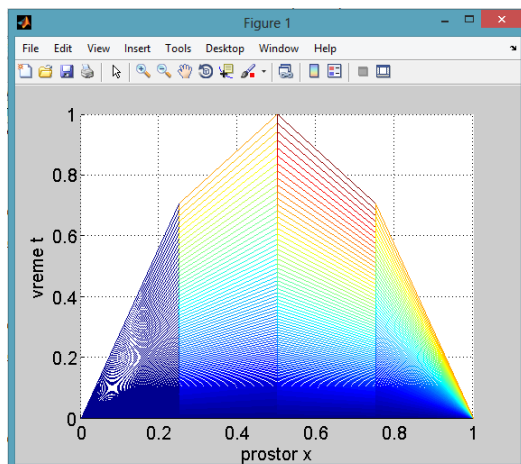
2.3. Приказ на проблемот со користење на Matlab

Со помош на Matlab со примена на Crank-Nicolson методот ги добиваме следниве решенија за различен број на интервали.

- Ова е претстава на Crank-Nicolson методот во случај кога имаме четири просторни интервали. На цртежите е прикажана зависноста на просторот x од времето t со помош на три-димензионален и дво-димензионален приказ. Забележуваме дека параболата нема правилен изглед.

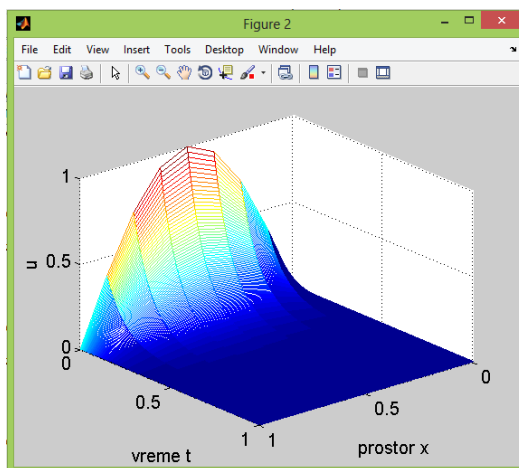


Цртеж 1 Три-димензионален приказ со 4 интервала
Drawing 1 Three Dimensional display with 4 interval

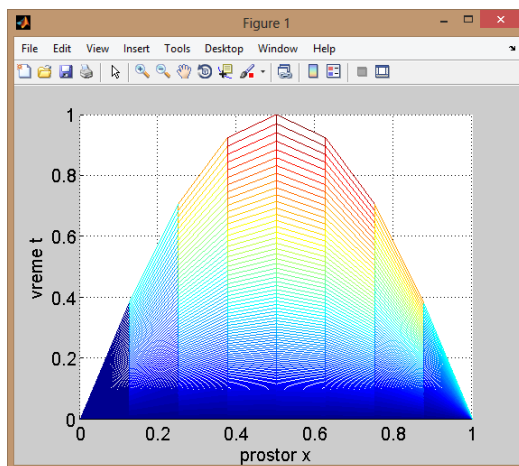


Цртеж 2 Дво-димензионален приказ со 4 интервала
Drawing 2 Two-dimensional display with 4 interval

- Ова е претстава на Crank-Nicolson методот во случај кога имаме осум просторни интервали. На цртежите е прикажана зависноста на просторот x од времето t со помош на три-димензионален и дво-димензионален приказ. Забележуваме дека параболата има подобар изглед, отколку параболата претставена со четири интервали.

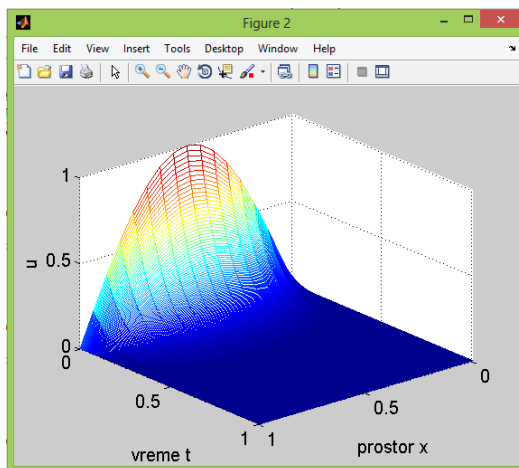


Цртеж 3 Три-димензионален приказ со 8 интервала
Drawing 3 Three Dimensional display with 8 interval

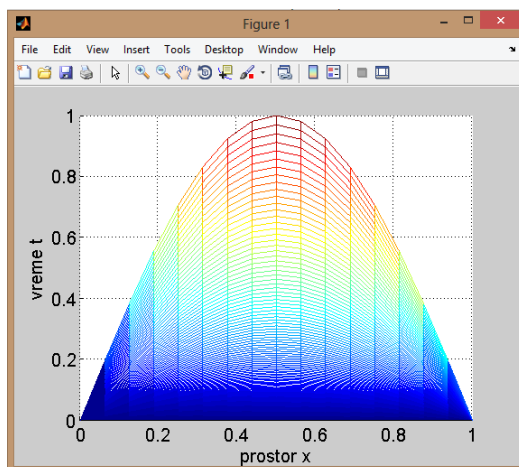


Цртеж 4 Дво-димензионален приказ со 8 интервала
Drawing 4 Two-dimensional display with 8 interval

- Како последна е претставата на Crank-Nicolson методот во случај кога имаме шеснаесет просторни интервали. На цртежите е прикажана зависноста на просторот x од времето t со помош на три-димензионален и дво-димензионален приказ. Забележуваме дека параболата има совршен изглед, за разлика од параболите претставени со четири и осум интервали.



Цртеж 5 Три-димензионален приказ со 16 интервала
Drawing 5 Three Dimensional display with 16 interval



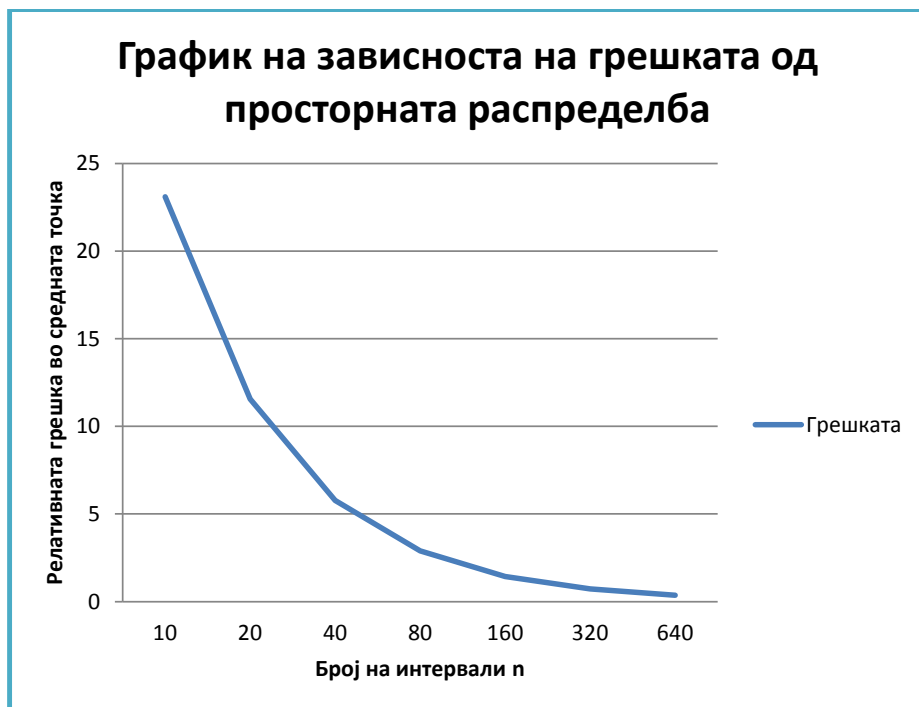
Цртеж 6 Дво-димензионален приказ со 16 интервала
Drawing 6 Two-dimensional display with 16 interval

3. Заклучок

Од приказот на Crank-Nicolson методот со помош на програмскиот јазик Matlab т.е. од претходните 6 цртежи доаѓаме до следниов заклучокот: за поголем број на интервали параболата се исцртува подобро и има подобар изглед, исто така со зголемување на бројот на интервали се намалуваат релативната и апсолутната грешка.

За да ја оцениме грешката во зависност од дискретизацијата, почнуваме со груба дискретизација (на пр. 10 интервали, 11 просторни точки). Во првата и крајната точка според граничните услови, температурата е постојано 0. Точките од 2 до 9 имаат x координати од 0.1 до 0.9. За овие вредности на x го добиваме точното (аналитичко) решение во временскиот момент $t=0.2$ или $t=2$ секунди. Точното решение го пресметуваме со формулата $u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} * \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) * \sin(\pi x n) * e^{-\pi^2 n^2 t}$.

На крајот на анализата, за $t = 2$ sec, од точното решение по Crank Nicolson го вадиме нумеричкото решение, делиме со точното решение и множиме со 100 и на тој начин ја добиваме релативната грешка во средишната точка изразена во проценти.



Цртеж 7 Зависноста на грешката од просторната распределба за различен број на интервали
Drawing 7 The dependence of the error by the space distribution for different number of intervals

Ова го правиме за секоја дискретизација.

На цртежот 7 е претставена зависноста на грешката од бројот на интервали. Всушност од цртежот гледаме дека грешката зависи од бројот на интервали, т.е. со зголемување на бројот на интервали (постепенно од 10, на 20, па на 160...) грешката постепенно се намалува, а тоа е резултат на тоа што со текот на времето загреаната прачка се лади при што температурата по целата должина на прачката асимптотски се приближува кон нула. Преку овој цртеж го прикажавме влијанието на дискретизацијата на точноста на решението со Crank-Nicolson методот

4. Литература:

- [1] Chupa, M.A. Numerical Techniques for Solving the One-Dimensional Heat Equation Numerical Analysis 2, 1998.
- [2] Gicev, V. and Trifunac, M.D. Non-linear earthquake waves in seven-storey reinforced concrete hotel, NISEE, Pacific Earthquake Engineering (PEER) Center, Univ. of California, Berkeley, 2006.
- [3] Gicev, V. and Trifunac, M.D. Amplification of linear strain in a layer excited by a shear-wave earthquake pulse, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 30, issue 10, 2010, 1073-1081.
- [4] Giordano, N.J. and Nakanishi, H. Computational Physics, 2nd edition "Implicit Methods: the Crank Nicolson Algorithm", 2005.
- [5] Kreyszig, E. "Advanced Engineering Mathematics", 8th edition, 1999
- [6] Li, J-R., and Greengard, L. On the numerical solution of the heat equation I: Fast solvers in free space, *Journal of Computational Physics* 226, 2007, 1891-1901
- [7] McKenney, A., Greengard, L., and Mayo, A. A fast Poisson Solver for Complex Geometries, *Journal of Computational Physics* 118, 1995, 348-355
- [8] Proskurowski, W. Lectures on CE504 "Numerical Solution of PDE", Univ. of Southern California, 2001
- [9] Smith G.D., Numerical Solution of Partial Differential Equations, 3rd Edition, Oxford Univ. Press, 1986.

