



**УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ - ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА**

ISSN:1857-8691

**ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2014
YEARBOOK
2014**

ГОДИНА 3

VOLUME III

**GOCE DELCEV UNIVERSITY - STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE**

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА



ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2014
YEARBOOK
2014

ГОДИНА 3

ЈУНИ, 2015

VOLUME III

GOCE DELCEV UNIVERSITY – STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

**ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА
YEARBOOK
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE**

За издавачот:

Проф д-р Владо Гичев

Издавачки совет

Проф. д-р Саша Митрев
Проф. д-р Лилјана Колева - Гудева
Проф. д-р Владо Гичев
Проф. д-р Цвета Мартиновска
Проф. д-р Татајана Атанасова - Пачемска
Доц. д-р Зоран Здравев
Доц. д-р Александра Милева
Доц. д-р Сашо Коцески
Доц. д-р Наташа Коцеска
Доц. д-р Зоран Утковски
Доц. д-р Игор Стојановиќ
Доц. д-р Благој Делипетров

Редакциски одбор

Проф. д-р Цвета Мартиновска
Проф. д-р Татајана Атанасова - Пачемска
Доц. д-р Наташа Коцеска
Доц. д-р Зоран Утковски
Доц. д-р Игор Стојановиќ
Доц. д-р Александра Милева
Доц. д-р Зоран Здравев

Главен и одговорен уредник

Доц. д-р Зоран Здравев

Јазично уредување

Даница Гавриловска - Атанасовска
(македонски јазик)
Павлинка Павлова-Митева
(англиски јазик)

Техничко уредување

Славе Димитров
Благој Михов

Редакција и администрација
Универзитет „Гоце Делчев“ - Штип
Факултет за информатика
ул. „Крсте Мисирков“ 10-А
п. фах 201, 2000 Штип
Р. Македонија

Editorial board

Prof. Saša Mitrev, Ph.D.
Prof. Liljana Koleva - Gudeva, Ph.D.
Prof. Vlado Gicev, Ph.D.
Prof. Cveta Martinovska, Ph.D.
Prof. Tatjana Atanasova - Pacemska, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.
Ass. Prof. Aleksandra Mileva, Ph.D.
Ass. Prof. Saso Koceski, Ph.D.
Ass. Prof. Natasa Koceska, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Utkovski, Ph.D.
Ass. Prof. Igor Stojanovik, Ph.D.
Ass. Prof. Blagoj Delipetrov, Ph.D.

Editorial staff

Prof. Cveta Martinovska, Ph.D.
Prof. Tatjana Atanasova - Pacemska, Ph.D.
Ass. Prof. Natasa Koceska, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Utkovski, Ph.D.
Ass. Prof. Igor Stojanovik, Ph.D.
Ass. Prof. Aleksandra Mileva, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.

Managing/ Editor in chief

Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.

Language editor

Danica Gavrilovska-Atanasovska
(macedonian language)
Pavlinka Pavlova-Miteva
(english language)

Technical editor

Slave Dimitrov
Blagoj Mihov

Address of the editorial office

Goce Delcev University – Stip
Faculty of Computer Science
Krstе Misirkov 10-A
PO box 201, 2000 Stip,
R. of Macedonia

**СОДРЖИНА
CONTENT**

АНАЛИЗА НА ТОЧНОСТА НА МЕТОДОТ НА CRANK-NICOLSON ВО ЗАВИСНОСТ ОД ПАРАМЕТАРОТ НА МЕТОДОТ r Весна Гунова, Владо Гичев	5
MULTIMEDIA TECHNOLOGIES IN ENGINEERING EDUCATION D.Minkovska, L.Stoyanova	15
МОДЕЛ НА ПРИФАЌАЊЕ И УПОТРЕБА НА РЕПОЗИТОРИУМОТ НАМЕНЕТ ЗА НАСТАВНИЧКИОТ КАДАР НА УНИВЕРЗИТЕТОТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП Мирјана Коцалева , Игор Стојановиќ , Зоран Здравев	21
РЕШАВАЊЕ НА ТОПЛИНСКА РАВЕНКА СО NEUMANN ГРАНИЧНИ УСЛОВИ СО УПОТРЕБА НА CRANK NICOLSON МЕТОДОТ Мирјана Коцалева , Владо Гичев	33
ГОЛЕМИ ПОДАТОЦИ ЗА ЕДИКАТИВНО ПОДАТОЧНО РУДАРЕЊЕ, АНАЛИТИКА НА ПОДАТОЦИ И ВЕБ РАБОТНИ ТАБЛИ Зоран Милевски, Елена Гелова, Зоран Здравев	39
АЛАТКИ ЗА ВИЗУАЛИЗАЦИЈА НА СОФТВЕР Александра Стојанова, Наташа Стојковиќ, Душан Биков	47
VALUATION OF FACTORS AFFECTING THE UNEMPLOYMENT RATE OF YOUNG PEOPLE IN REPUBLIC OF MACEDONIA Tatjana Atanasova Pacemska ¹ , Elena Mitreva	56
NUMERICAL ANALYSIS OF BEHAVIOR FOR LORENZ SYSTEM WITH MATHEMATICA Biljana Zlatanovska	63
ДИГИТАЛЕН ВОДЕН ЖИГ ВО СЛИКА ВО ФРЕКВЕНТЕН ДОМЕН СО ДИСКРЕТНА КОСИНУСНА ТРАНСФОРМАЦИЈА Ана Љуботенска, Александра Милева	73
COMPARING OF THE BINOMIAL MODEL AND THE BLACK-SCHOLES MODEL FOR OPTIONS PRICING Limonka, Lazarova, Biljana, Jolevska-Tuneska , Tatjana, Atanasova-Pacemska	83

АНАЛИЗА НА ТОЧНОСТА НА МЕТОДОТ НА CRANK-NICOLSON ВО ЗАВИСНОСТ ОД ПАРАМЕТАРОТ НА МЕТОДОТ r

Весна Гунова¹, Владо Гичев¹

¹ Факултет за информатика, Универзитет „Гоце Делчев“, Штип

Апстракт. Методот на Crank-Nicolson е моќен имплицитен метод за нумеричко решавање на параболични парцијални диференцијални равенки. Бидејќи методот е имплицитен, тој е безусловно стабилен. Ја анализираме точноста на методот на Crank-Nicolson во зависност од параметарот r кој го дава односот на временскиот чекор со квадратот на просторниот чекор. За таа цел разгледуваме метална прачка иницијално загреана со определена температурна распределба. Температурата на краевите на прачката е пропишана во секоја временска инстанца. За овој пример постои точно аналитичко решение во облик на бескраен Fourier ред. Со помош на програмскиот пакет Matlab го решаваме проблемот нумерички за одредена вредност на параметарот r . Ова нумеричко решение го споредуваме со точното аналитичко решение и ја добиваме грешката за актуелниот параметар r . Ова го повторуваме и за други вредности на r со што добиваме функционална зависност на грешката на методот во зависност од параметарот r .

Клучни зборови: топлинска равенка, Crank-Nicolson метод.

ACCURACY OF THE CRANK-NICOLSON METHOD DEPENDING ON THE PARAMETER OF THE METHOD r

Vesna Gunova¹, Vlado Gicev¹

¹ Faculty of computer science, Goce Delcev University, Stip, Macedonia

Abstract. The method of Crank-Nicolson is powerful implicit method for numerical solving of parabolic partial differential equations. Because the method is implicit, it is unconditionally stable. We analyze the accuracy of the Crank-Nicolson method depending on the parameter r which is the ratio of the time step and the square of the spatial interval. To do this study, we consider metal rod initially heated with specific heat distribution. Temperature at the ends of the rod is prescribed at each time. For this example, close analytical solution given in Fourier series exists. Using Crank-Nicolson method, with Matlab we solve the problem for specific r . We compare this numerical solution with the exact analytical solution and obtain the error for the actual parameter r . Then we repeat the procedure for other values of the parameter r . On this way we are obtaining the dependence of the error of the method upon the parameter r .

Key words: heat equation, Crank-Nicolson method.

1. ВОВЕД

Во математиката, парцијална диференцијална равенка (PDE) е диференцијална равенка којашто содржи непознати функции со повеќе променливи и нивни парцијални изводи. Во споредба, обичната диференцијална равенка се занимава со функции со една променлива и нејзините изводи. Парцијалните диференцијални равенки се користат за формулирање на проблеми кои вклучуваат функции со неколку променливи. Парцијалните диференцијални равенки се користат за опис на голем број најразлични феномени како: звук, топлина, електростатика, електродинамика, проток на флуиди, еластичност или пак квантна механика. За да се проучуваат физичките и инженерски феномени се востановува математички модел со познати иницијални и гранични услови, кој е управуван од парцијална диференцијална равенка. Овој математички модел ни дава решение на проучуваниот феномен во секоја просторна точка и во секое време.

За жал, парцијалните диференцијални равенки имаат затворени решенија само за мал број специјални гранични и иницијални услови. За таа цел, авторите предлагаат нумерички шеми и методи за решавање на елиптични ([4],[7],[8],[9]), параболични ([1],[4],[5],[6],[8],[9]) и хиперболични ([2],[3],[8],[9]) парцијални диференцијални равенки (PDE).

Класичните медиуми на животната средина (хидросфера, литосфера, атмосфера, биосфера) се генерално опишани со математички модели кои се управувани од PDE. Примената на решенијата на овие математички модели во практика е од огромно значење за природните науки, како и во науките за животна средина и инженерството. Во овој труд акцентот го ставаме на нумеричкото решавање на параболичните парцијални диференцијални равенки и примена на Crank-Nicolson метод во решавање на проблем со дифузија на топлина.

1.1. Метод на конечни разлики за решавање параболична равенка

Го земаме следниот пример на парцијална диференцијална равенка од параболичен вид, со гранични и почетни услови.

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c} u_t, & u = u(x,t), & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{граничен услов} \\ u(x,0) = f(x) & \text{почетен услов} \end{cases} \quad (1)$$

Во овој проблем имаме константа c , која претставува спроводливост на топлина низ прачка од одреден материјал на чиешто краеве се одржува температура нула, а пак почетната температура е изразена со $f(x)$.

За да може овој проблем да биде нумерички решен ги земаме x и t така што

$$\begin{aligned} x_i &= ih, & i &= 0, 1, 2, \dots \\ t_j &= jk & j &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Експлицитен метод на конечни разлики

Нека $u_{i,j}$ биде нумеричка апроксимација на $u(x_i, t_j)$.

Апроксимацијата на парцијалната диференцијална равенка со конечни разлики е

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{ck} \quad (3)$$

Го дефинираме параметарот r како

$$r = \frac{ck}{h^2} = \frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (4)$$

Со примена на оваа замена за r во претходното равенство, добиваме

$$u_{i,j+1} = ru_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} \quad (5)$$

Може да покажеме дека за стабилно решение е потребно $0 < r \leq 1/2$. Нестабилното решение е она за коешто малите грешки растат како што решението се развива.

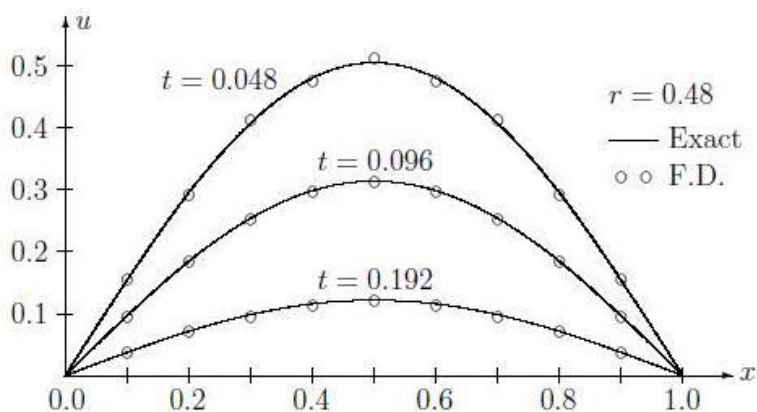
Нестабилноста којашто се јавува за $r > 1/2$ може да ја прикажеме со следниот пример, прикажан со равенство (6). Го земаме следниот проблем со гранични и почетни вредности (во бездимензионална форма).

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, & 0 < x < 1, & u = u(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

Го решаваме овој проблем со помош на експлицитен метод на конечни разлики, со $h = \Delta x = 0,1$ и $k = \Delta t = rh^2 = r(\Delta x)^2$ за две различни вредности на r ; $r=0,48$ и $r=0,52$. Двете нумерички решенија (слика 1 и 2) се споредени со аналитичкото решение

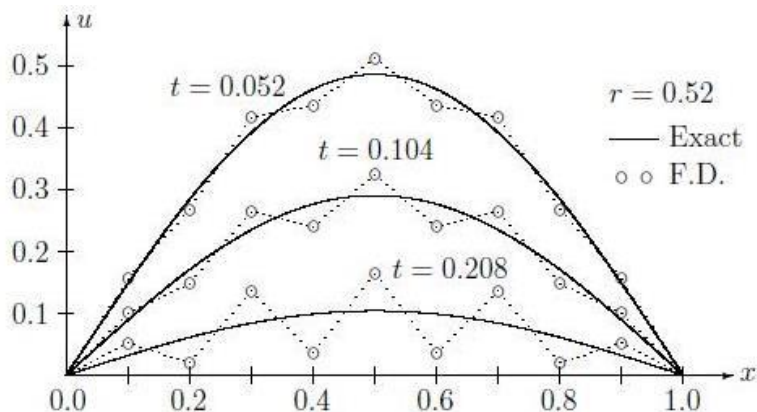
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2} (\sin n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}. \quad (7)$$

Што може да биде добиено со техниката на раздвојување на променливите. Нестабилноста за $r > 1/2$ јасно може да се види на слика 2.



Слика 1. Решение со експлицитен метод на конечни разлики со $r=0,48$
Figure 1. Explicit finite difference solution with $r=0,48$

Оттука произлегува дека слабоста или недостатокот на овој експлицитен метод е тоа што мал временски чекор Δt мора да биде користен за да се одржува стабилноста. Овој недостаток може да се отстрани со помош на Crank-Nicolson алгоритмот којшто е опишан во продолжение.



Слика 2. Решение со експлицитен метод на конечни разлики со $r=0,52$
Figure 2. Explicit finite difference solution with $r=0,52$

Имплицитен Crank Nicolson метод

Crank-Nicolson методот претставува стабилен алгоритам којшто дозволува поголем временски чекор од оној што може да се искористи во експлицитниот метод. Всушност, стабилноста на Crank-Nicolson методот не зависи од параметарот τ .

Основата на овој алгоритам е пишување на конечната диференцијална равенка во средно ниво од времето: $i, j + \frac{1}{2}$. Конечната разлика во $j + \frac{1}{2}$ се пресметува како аритметичка средина од две централни разлики од изводите од времето во j и $j + 1$.

Повторно ја разгледуваме истата равенка со исти гранични и почетни услови

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c}u_t, & u = u(x, t), & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{граничен услов} \\ u(x, 0) = f(x) & \text{почетен услов} \end{cases}$$

Нумеричката апроксимација на парцијалната диференцијална равенка

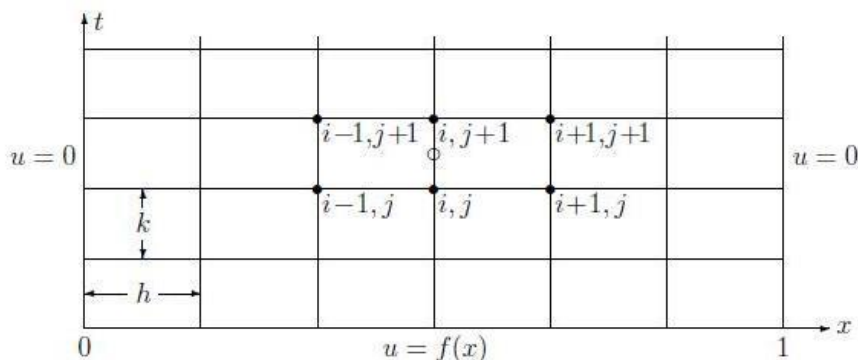
$$\frac{1}{2} \left[\frac{u_{i+1, j+1} - 2u_{i, j+1} + u_{i-1, j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h^2} \right] = \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{ck}$$

Каде што десната страна од равенството е апроксимација на централните разлики на изводот од времето во средишната точка $j + \frac{1}{2}$. Повторно го дефинираме параметарот τ како $r = \frac{ck}{h^2} = \frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}$ и ја подредуваме равенката така што сите изрази со $j+1$ ќе се наоѓаат од левата страна на равенството:

$$-ru_{i-1, j+1} + 2(1+r)u_{i, j+1} - ru_{i+1, j+1} = ru_{i-1, j} + 2(1-r)u_{i, j} + ru_{i+1, j} \quad (8)$$

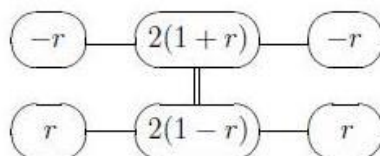
Оваа формула се нарекува Crank-Nicolson алгоритам.

На слика 3 ги прикажуваме точките вклучени во Crank-Nicolson шемата. Доколку започнеме со редот на дното ($j=0$), и се движиме нагоре, десната страна од равенството (8) е позната, а пак вредностите од левата страна се непознати. За започнување на процесот дозволуваме $j=0$ и ја запишуваме Crank-Nicolson равенката за секој $i=1, 2, \dots, N$ за да се добијат N симултани равенки, во N непознати, каде што N е бројот на внатрешните точки во редот (граничните точки со познати вредности се исклучени).



Слика 3. Мрежно претставување на Crank-Nicolson метод
Figure 3. Mesh for Crank-Nicolson

Системот од равенки претставува триаголен систем, од каде што секоја равенка има три последователни ненули центрирани околу дијагоналата. За подобрување во време го зголемуваме j во $j=1$ и го решаваме новодобиениот систем од равенки. Пристапот којшто побарува решавање на симултани равенки се нарекува имплицитен алгоритам. Приказ на матрицата за Crank-Nicolson метод е прикажан на следната слика.



Слика 4. Приказ на матрица за Crank-Nicolson алгоритам
Figure 4. Stencil for Crank-Nicolson algorithm

Се забележува дека матрицата од коефициенти на Crank-Nicolson системот од равенки не се променува од чекор во чекор. Овој алгоритам е стабилен за која било вредност на r , иако подобра точност обезбедува за помали вредности на r . Во споредба со експлицитниот метод, Crank-Nicolson методот обезбедува подобра точност за истите вредности на r .

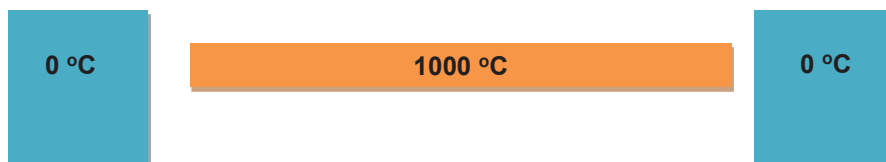
2. ПРИМЕНА НА CRANK-NICOLSON МЕТОДОТ ВО РАВЕНКА ЗА ДИФУЗИЈА НА ТОПЛИНА

Точноста на методот во функција од параметарот r ја истражуваме на следниот пример. Како нумерички пример решаваме равенка за дифузија на топлина зададена со следните гранични и почетни услов.

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad u = u(x, t)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1000 * 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1000 * 2(1 - x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Слика 5. Илустративен приказ на равенката за дифузија
Figure 5. An illustrative representation of the diffusion equation

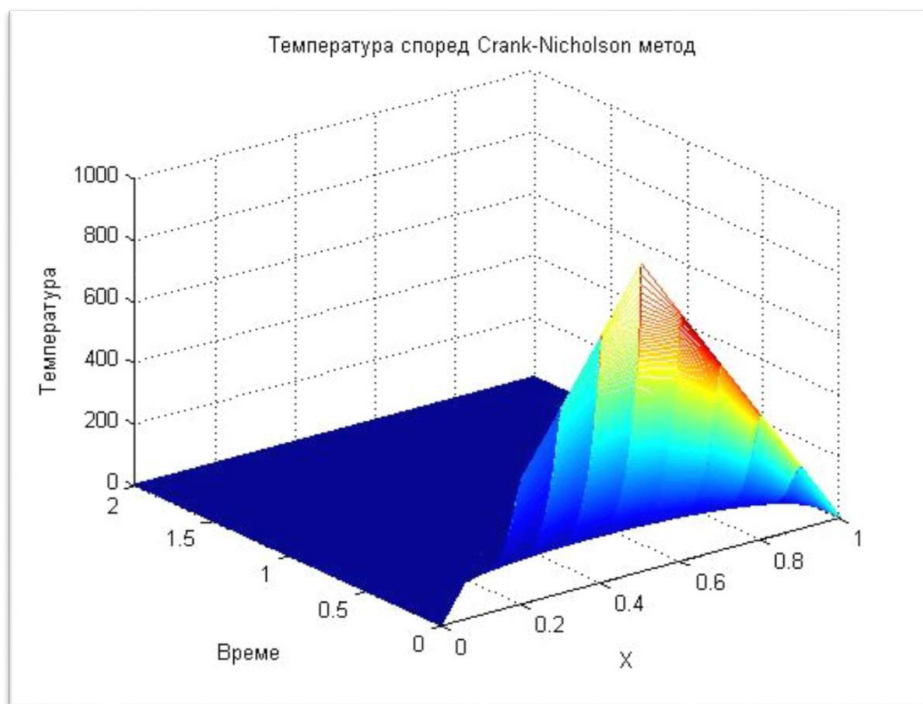
Во решавањето на овој проблем најпрво селектираме просторен чекор h и временски чекор k . На овој начин го контролираме r . Решението, т.е. температурата во секоја точка од прачката за различни временски инстанци од 0 до 2 секунди за $r = \frac{k}{h^2} = \frac{1/100\ 000}{1/10\ 000} = 0,1$ е прикажано на слика 6a.

Со помош на овие вредности го пресметуваме параметарот r , којшто претставува количник од временскиот чекор и просторниот чекор на степен два. За r добиваме вредност 0,1 и истата ја заменуваме во основната формула за Crank-Nicolson метод.

$$-ru_{i-1,j+1} + 2(1+r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + 2(1-r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}$$

$$-0,1u_{i-1,j+1} + 2,2u_{i,j+1} - 0,1u_{i+1,j+1} = 0,1u_{i-1,j} + 1,8u_{i,j} + 0,1u_{i+1,j}$$

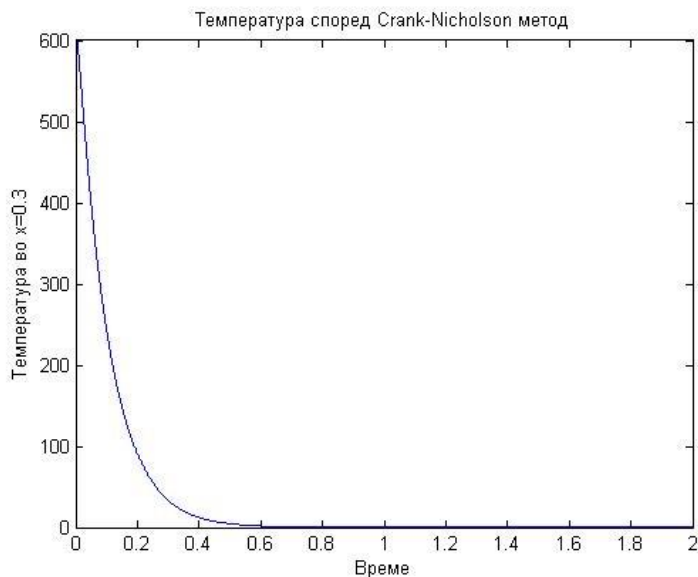
Со имплементација на овој алгоритам во MATLAB ја добиваме нумерички температурата во секоја точка во прачката во кое било време.



Слика 6(а). Приказ на температура со Crank-Nicolson метод кога $r=0,1$
Figure 6(a). Temperature with Crank-Nicolson method $r=0,1$

Со промена на вредноста на параметарот на Crank-Nicolson методот забележуваме промена во решението на парцијалната диференцијална равенка односно равенката на дифузија. Аналогно, со промена на κ , имаме променета вредност на параметарот r , со што добиваме нов систем од равенки со нови вредности во матрицата од коефициенти.

На сликата подолу се забележува зависноста на параметарот r и конвергирањето на решението. На слика 6б е дадена промената на температурата во точка 3 (на растојание 0.3 м од левиот крај) во тек на време.



Слика 6(б). Температура во точка $x=0,3$ во однос на време t за $r=0,1$
Figure 6(b) Temperature at point $x = 0,3$ in relation to the time t for $r = 0,1$

За да ја прикажеме точноста на нумеричката пресметка, потребно е да ја одредиме грешката, односно нормата на векторот на грешка.

Аналитичкото решение на парцијалната диференцијална равенка во нашиот пример е следното:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2} (\sin n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}$$

Создаваме вектор ut од добиените пресметани аналитички решенија во точка $x=0,3$ за време $t=0;0,5;1;1,5;2$. Во пресметката на аналитичкото решение ги земаме првите десет членови од бесконечниот ред.

$$ut=[ut1 \ ut2 \ ut3 \ ut4 \ ut5];$$

$$ut=[599.779332 \ 4.716182 \ 0.033918 \ 2.439493e-04 \ 1.754488e-06];$$

За вредност $r=0,1$ создаваме вектор $u01$, од добиените решенија по Crank-Nicolson методот за $r=0,1$ во точка $x=0,3$ за време $t=0;0,5;1;1,5;2$.

$$u01=[600 \ 4.718484 \ 0.0339485 \ 2.442532e-04 \ 1.757527e-06].$$

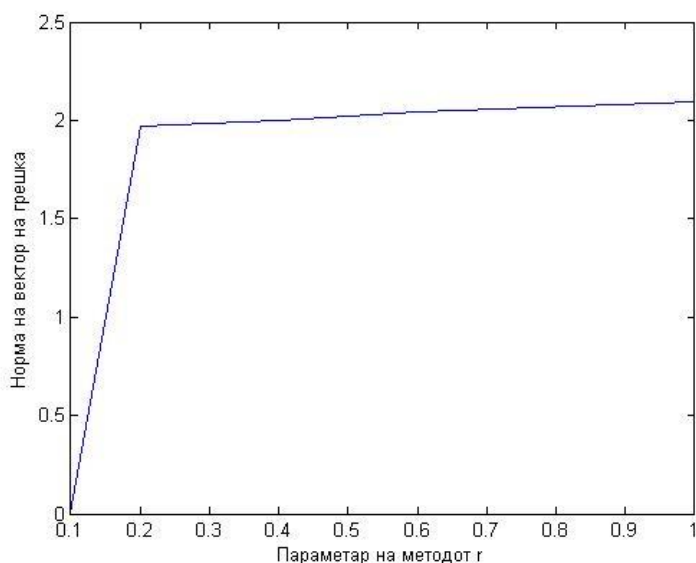
За пресметување на грешката формираме вектор на грешка, поединечно за секој случај за вредноста на $r=0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 1$; како количник од разликата од векторот од нумеричките вредности добиени за соодветната вредност на r и векторот од аналитичките решенија како деленик, и векторот на аналитичкото решение како делител, односно ја пресметуваме релативната грешка. На пример векторот на грешка за $r=0,1$ го бележиме како $eu01$.

$$eu01=[3.679144e-04 \ 4.882204e-04 \ 8.943547e-04 \ 0.001301 \ 0.001806];$$

Следниот чекор е пресметување на норма 2 на векторот на грешка, односно пресметуваме квадратен корен од збирот на квадратите на поединечните вредности за векторите на грешка за секоја вредност во време $t=0;0,5;1;1,5;2$. На пример за $r=0,1$ имаме пресметување: $neu01=\text{norm}(eu01,2)$.

Истата постапка ја правиме и за другите вредности на параметарот r .

Графички прикажан односот на нормата на векторот на грешка и параметарот на методот е следен:



Слика 7. Норма на вектор на грешка во однос на параметарот на Crank-Nicolson метод во $x=0,3$
Figure 7. Norm of the error vector with respect to the parameter of the Crank-Nicolson method for $x=0,3$

Забележуваме дека грешката во однос на аналитичкото решение за параметар на методот $r=0,1$ изнесува 0.00247524822177. За вредност за $r=0,2$ грешката се зголемува и изнесува 1.99638447059177. За вредност на параметарот $r=1$ имаме вредност на грешката 2.09458333840260.

Забележуваме дека најмала грешка во однос на аналитичкото решение имаме за параметарот на методот со вредност 0,1 односно најточно решение добиваме за најмалата разгледувана вредност на параметарот r .

Резултатите се претставени во табела 1.

Табела 1. Норма на векторот на грешка во однос на параметарот на методот во $x=0,3$
Table 1. Norm of the error vector with respect to the parameter of the method for $x=0,3$

Параметар на Crank-Nicolson метод r	Норма 2 на вектор на грешка err_2
0,1	0,00247524822177
0,2	1.96638447059177
0,4	1.99989984752919
0,6	2.04010194383062
1	2.09458333840260

3. ЗАКЛУЧОК

Од добиените резултати можеме да потврдиме дека Crank-Nicolson алгоритмот е стабилен за која било вредност на r , иако подобра точност обезбедува за помали вредности на r . Во споредба со експлицитниот метод, обезбедува стабилност и за вредности на r поголеми од $\frac{1}{2}$. Според добиените резултати, немаме значителна разлика во нормата на грешка за вредност на параметарот на методот поголема од 0.5 со што се потврдува дека Crank-Nicolson методот како имплицитен метод е постабилен од експлицитниот метод и обезбедува поточни решенија.

Користена литература

- [1] Kocaleva, M and Gicev, V (2014) Application of the Crank-Nicolson method for solving heat equations (on Macedonian). Yearbook 2013 - Faculty of Computer Science, 2 (2). pp. 35-45. ISSN 1857- 8691
- [2] Gicev, V. and Trifunac, M.D. (2006) *Non-linear earthquake waves in seven-storey reinforced concrete hotel*, NISEE, Pacific Earthquake Engineering (PEER) Center, Univ. of California, Berkeley.
- [3] Kreyszig, E. “Advanced Engineering Mathematics”, 8th edition, 1999
- [4] Li, J-R., and Greengard, L. On the numerical solution of the heat equation I:Fast solvers in free space, *Journal of Computational Physics* 226, 2007, 1891-1901
- [5] McKenney, A., Greengard, L., and Mayo, A. A fast Poisson Solver for Complex Geometries, *Journal of Computational Physics* 118, 1995, 348-355
- [6] Proskurowski, W. Lectures on CE504 “Numerical Solution of PDE”, Univ. of Southern California, 2001
- [7] Smith G.D., Numerical Solution of Partial Differential Equations, 3rd Edition, Oxford Univ. Press, 1986.
- [8] Gicev, V. and Trifunac, M.D. Amplification of linear strain in a layer excited by a shear-wave earthquake pulse, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 30, issue 10, 2010, 1073-1081.
- [9] Giordano, N.J. and Nakanishi, H. Computational Physics, 2nd edition “Implicit Methods: the Crank Nicolson Algorithm”, 2005.

