УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ" - ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

ISSN:1857-8691

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2014
YEARBOOK
2014

ГОДИНА 3 VOLUME III

GOCE DELCEV UNIVERSITY - STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2014
YEARBOOK
2014

ГОДИНА 3 ЈУНИ, 2015 VOLUME III

GOCE DELCEV UNIVERSITY – STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА
YEARBOOK
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

Редакција и администрација	**Address of the editorial office**
Универзитет „Гоце Делчев“-Штип	Goce Delcev University – Stip
Факултет за информатика	Faculty of Computer Science
ул. „Крсте Мисирков“ 10-А	Krste Misirkov 10-A
п. фах 201, 2000 Штип	PO box 201, 2000 Štip,
Р. Македонија	R. of Macedonia

СОДРЖИНА
CONTENT

РЕШАВАЊЕ НА ТОПЛИНСКА РАВЕНКА СО NEUMANN ГРАНИЧНИ УСЛОВИ СО УПОТРЕБА НА CRANK NICOLSON МЕТОДОТ

Мирјана Коцалева [1], Владо Гичев [1]

[1] Факултет за Информатика, Универзитет „Гоце Делчев“, Штип
mirjana.kocaleva@ugd.edu.mk
vlado.gicev@ugd.edu.mk

Апстракт. Во овој труд разгледуваме решавање на Neumann проблемот при трансфер на топлина низ прачка. Иницијално прачката е загреана по должина, а на краевите температурата се менува во тек на време. Проблемот се опишува со парцијална диференцијална равенка која ја решаваме нумерички со Crank - Nicolson методот, во случај кога имаме Neumann гранични услови и амбиентна температура $u_A = 500$.

Од решението може да се види како прачката се лади во тек на времето, така што на почетокот десните краеви се ладат побрзо бидејќи се применети радијациските (radiation) гранични услови. Но со времето, со дистрибуција на температурата низ прачката, температурата на прачката станува сѐ повеќе и повеќе иста со асимптотската вредност $\lim_{t\to\infty} u(x) = u_A = 500$.

Клучни зборови: *парцијални диференцијални равенки, Crank - Nicolson метод, Neumann гранични услови*

SOLVING THE HEAT EQUATION WITH NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS USING THE CRANK NICOLSON METHOD

Mirjana Kocaleva [1], Vlado Gicev [1]

[1] Faculty of Computer Science, Goce Delcev University, Stip, Macedonia
mirjana.kocaleva@ugd.edu.mk
vlado.gicev@ugd.edu.mk

Abstract. In this paper we consider the solution of Neumann problem of the heat transfer through the rod. Initially the rod is heated longitudinally, and at the ends the temperature changes over time. The problem is governed by a partial differential equation which is solved numerically by Crank - Nicolson method, when we have Neumann boundary conditions and ambient temperature $u_A = 500$.

From the solution it can be seen that as time elapsing the rod is cooling, so that at the beginning right oriented ends are cooled faster because there radiation boundary conditions have been applied. With time elapsing, with distribution of temperature through the rod, the rod temperature becomes more and more equal with the asymptotic value $\lim_{t\to\infty} u(x) = u_A = 500$.

Keywords: *partial differential equations, Crank - Nicolson method, Neumann boundary conditions*

1. Вовед

Поголем дел од природните и инженерски феномени се опишуваат со парцијални диференцијални равенки. Парцијалната равенка уште се нарекува и квазилинеарна, ако е линеарна во повисоки изводи. Оттука квазилинеарната равенка од втор ред со две независни променливи x, y може да се претстави со формулата:

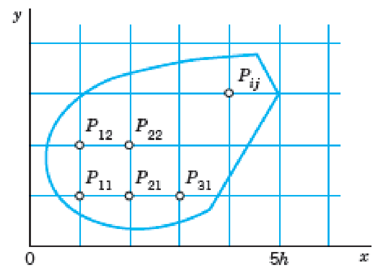
$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \qquad (0)$$

каде што u е непозната функција.
Оваа равенка може да биде од три типа

елиптичен тип ако $ac-b^2>0$ (Пример: Лапласова равенка)
параболичен тип ако $ac-b^2=0$ (Пример: Топлинска равенка)
хиперболичен тип ако $ac-b^2<0$ (Пример: Бранова равенка)

(во топлинската и брановата равенка, y е времето t). Овде коефициентите a, b, c може да се функции од x, y, така што тип (1) може да биде различен во различни региони на xy - рамнината. Оваа класификација е од големо практично значење, бидејќи општите решенија се разликуваат од тип до тип и затоа се разгледуваат дополнителни услови (гранични и почетни услови) кои мора да бидат земени предвид.

$$P_{ij} = (ih, jh), \qquad u_{ij} = u(ih, jh).$$



Слика 1. Регион во xy - рамнината покриен со мрежа и мрежни точки P_{11} = (h, h), .. , Pij = (ih, jh)…
Figure 1. The region in the xy - plane covered by the network and network points P11 = (h, h), .. , Pij = (ih, jh)…

Апликациите кои вклучуваат елиптични равенства обично доведуваат до гранични вредносни проблеми во регионот R наречен прв граничен вредносен проблем или Dirichlet проблем, ако u е предвиден на граничната кривина C на R, вториот вредносен проблем е Neumann проблем ако $u_n = \delta u/\delta n$ (нормален извод од u) и е предвиден на C или mixed проблем ако u е предвиден на дел од C и u_n е на останатиот дел. C најчесто е затворена крива линија (или нешто што се состои од две или повеќе криви).

Бидејќи во општ случај не постојат затворени аналитички решенија на овие равенки, тие се решаваат нумерички. Така, истражувачите решавајќи конкретни проблеми предлагаат различни нумерички шеми за решавање на елиптични (Bayliss et. al., 1980), параболични (Chupa, 1998; Reimer et al., 2012) и хиперболични (Gicev & Trifunac, 2006) парцијални диференцијални равенки. Овој труд е логичен продолжеток на нашиот претходен труд (Kocaleva & Gicev, 2014).

Равенката што го опишува нашиот проблем е еднодимензионалната топлинска равенка

$$u_t = c^2 u_{xx} (\text{с е константа}). \qquad (1)$$

Оваа равенка обично се користи за x во фиксни интервали 0≤x≤L и време t≥0, пропишана почетна температура u(x,0)=f(x) (f е дадено) и гранични услови во x=0 и x=L за сите t≥0. Претпоставуваме дека c=1 и L=1; ова секогаш може да се оствари со линеарна трансформација на x и t. Тогаш топлинската равенка и условите се

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1 \quad t \geq 0 \qquad (2)$$

во внатрешноста на доменот

u(x,0)=f(x) (3)
u(0,t)=u(1,t)=0 (4)

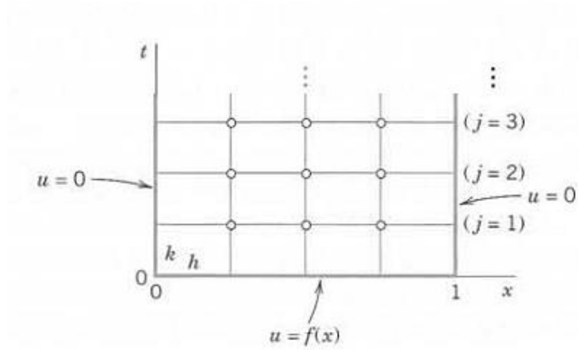
каде што (3) се почетни услови, а (4) се гранични услови.
Апроксимацијата на (2) со конечни разлики е

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \qquad (5)$$

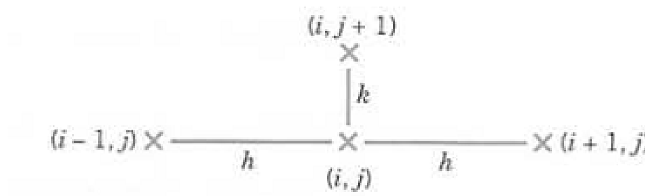
Слика 2 ја покажува соодветната мрежа и мрежните точки. Просторните инкременти се h во x - правец и k во t -правец. Формулата (5) ги вклучува четирите точки прикажани на слика 3. На лево користиме конечна разлика напред, бидејќи немаме информација за негативно x на почетокот. Од (5) го пресметуваме $u_{i,j+1}$ кој одговара на временскиот ред j+1, во однос на другите три кои одговараат на временскиот ред j; решавајќи го (5) за $u_{i,j+1}$ добиваме

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{ij} + r\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) \qquad (6)$$

каде што $r = \frac{k}{h^2}$.



Слика 2. Мрежа и мрежни точки кои одговараат на равенките (5) и (6)
Figure 2. Network and networked points corresponding to equations (5) and (6)



Слика 3. Четирите точки во равенките (5) и (6)
Figure 3. The four points in equations (5) and (6)

Пресметките со овој експлицитен метод базирани на (6) се едноставни. Сепак, може да се покаже дека клучно за конвергенција на овој метод е условот

$$r = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad r = \frac{1}{2} \tag{7}$$

тоа е бидејќи u_{ij} има позитивен коефициент во (6) или (за $r = \frac{1}{2}$) ќе биде отсутен од (6). Интуитивно (7) значи дека не треба да одиме брзо во t - насоката.

2. Crank - Nicolson метод

Метод кој не наметнува ограничувања на $r = \frac{k}{h^2}$ е Crank-Nicolson методот кој користи вредности на u во шест точки на слика 4. Идејата на методот е замена на разликата количник на десната странана (5) со $\frac{1}{2}$ пати од збирот на двата различни количници во двата временски реда. Наместо (5) имаме

$$\frac{1}{k}\left(u_{i,j+1} - u_{ij}\right) = \frac{1}{2h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right) + \frac{1}{2h^2}\left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}\right) \tag{8}$$

С о множење со 2k и запишување на $r = \frac{k}{h^2}$, ги собираме условите кои одговараат на временскиот ред j+1 од лево и условите кои одговараат на временскиот ред j од десно:

$$(2 + 2r)u_{i,j+1} - r\left(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}\right) = (2 - 2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \tag{9}$$

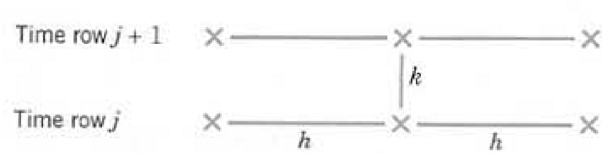
Генерално, трите вредности на лево се непознати, додека трите вредности на десно се познати.

Ако го поделиме x - интервалот 0<x<1 во (2) на n еднакви интервали, имаме n-1 внатрешни мрежни точки за временски ред. Тогаш за j=0 и i=1,.., n-1, формулата (9) дава линеарен систем од n-1 равенки за n-1 непознати вредности u_{11}, u_{21},.., $u_{n-1,1}$ во првиот временски ред во однос на првичните вредности u_{00},u_{10},..,u_{n0} и граничните вредности u_{01},u_{n1}(=0).

Слично за j=1, j=2... односно за секој временски ред треба да решиме систем од n-1 линеарни равенки кои произлегуваат од (9).

Иако $r = \frac{k}{h^2}$ не наметнува ограничувања, помал r ќе дава подобар резултат. Во пракса, се избира k со која може да се зачува значителна сума на работа, без правење на r многу големо. Често добар избор за r е r=1. Тогаш (9) станува поедноставен.

$$4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} \tag{10}$$



Слика 4. Шесте точки во Crank - Nicolson формулите (9) и (10)
Figure 4. Six points in the Crank - Nicolson formula (9) and (10)

3. Neumann проблем

Продолжуваме со дискусијата за нумеричко решение на проблемите со гранични вредности за елиптичните равенки во регион R во xy - рамнината. Во Neumann проблемот се соочуваме со нова ситуација, бидејќи постојат гранични точки во кои нормалниот извод $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ од решението е даден, но u е непозната бидејќи не е дадена. За да се справиме со таквите точки е потребна нова идеја. Ова е идејата зад Neumann проблемот. Ќе разгледаме соодветен пример.

Нашиот проблем е со употреба на Crank Nicolson методот, да се реши еднодимензионалната топлинска диференцијална равенка $u_t = u_{xx}$ за (x,t) ϵ [0,1] X [0,T] под услов ако имаме Neumann гранични услови: $u_x(0,t) = 0$, гранични услови на изолирана површина, и$u_x(1,t) = E(u_A^4 - u^4(1,t))$, радијациски (radiation) гранични услови и почетни услови $u(x,0) = 600$, каде $E = 1.73e^{-9}$ (Boltzmann's константа) и $u_A = 500$ (амбиентна температура). Времето T е 5 секунди, T=5 и го наоѓаме решението во t=0(0.25)5.

Целта е да се реши Neumann проблемот со употреба на Crank Nicolson методот. Овој проблем нема точно теоретско решение, па затоа мора да го решаваме нумерички. Кај Neumann проблемот не ги знаеме вредностите на зависните варијабли во граничните услови. Ова значи дека е потребно да ги вклучиме и граничните точки во мрежата, па така бројот на просторни точки ќе биде N=(1+h)/h.

Од равенката за Crank Nicolson методот (9), можеме да забележиме дека за внатрешните точки (2 ≤ I ≤ N-1) равенката е иста како (9), но за i=0, N таа треба да се модификува со цел да ги вклучи и граничните услови. За таа цел мрежата се проширува со две помошни просторни точки i=-1 и i=N+1 и од овде имаме:

Граничниот услов $u_x(0,t) = 0$ може да се поистовети со изразот на централната разлика: u_x $u_x(0,t) = 0 \approx \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} \to u_{-1} \approx u_1$. Знакот ≈ означува приближување на диференцијацијата со диференцирање. Овде користиме $u_{-1} = u_1$ и првата равенка на системот е

$$(2+2\lambda)u_{0,j+1} - 2\lambda u_{1,j+1} = (2-2\lambda)u_{0,j} + 2\lambda u_{1,j} \quad , j\epsilon NU\{0\}.$$

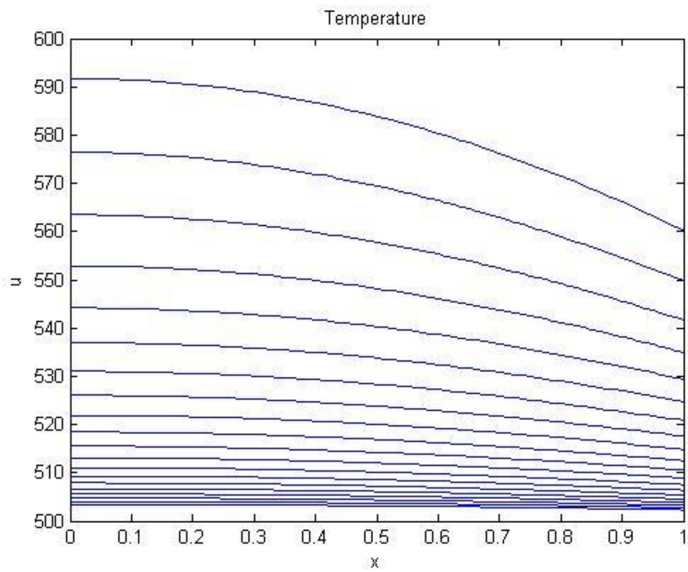
Вториот граничен услов $u_x(1,t) = E(u_A^4 - u^4(1,t))$ се пресметува со равенката:

$$-2\lambda u_{N-1,j+1} + (2+2\lambda)u_{N,j+1} = 2\lambda u_{N-1,j} + (2-2\lambda)u_{N,j} + 4hE\lambda u_A^4 - 2hE\lambda u_{N,j}^4 - 2hE\lambda u_{N,j+1}^4$$

Ова е само во случаите кога A(1,2) и A(N,N-1) кога на десната страна на равенството имаме дополнителни изрази. Првите два дополнителни изрази се познати (пресметани се во претходниот временски чекор), додека пак последниот израз се добива со повторување на системот сè додека

$\left|u_{N,j+1}^{l+1} - u_{N,j+1}^{l}\right| \leq \tau$ каде што l е бројот на итерации и τ е толеранцијата[1]. Вредноста на толеранцијата при решавање на проблемот земаме да е еднаква на 10^{-5}.

Овој проблем го решаваме програмски со употреба на Matlab програмскиот јазик. И како решение го добиваме следниот графички приказ (слика 5):



Слика 5. Графички приказ на проблемот со употреба на Matlab
Figure 5. Graphical representation of the problem by using Matlab

4. Заклучок

Параметарот r ($r = \frac{k}{h^2}$) се зема да биде 1, бидејќи гарантира стабилно решение за секое h, односно за секоја точка во мрежата. Од слика 5 можеме да забележиме дека прачката се лади со времето бидејќи нејзината почетна температура ($u_0 = 600$) е поголема од амбиентната температура ($u_A = 500$). На почетокот десните краеви се ладат побрзо, бидејќи се применети радијациските (radiation) гранични услови, но со времето, со дистрибуција на температурата низ прачката, температурата на прачката станува сè повеќе и повеќе иста со асимптотската вредност $\lim_{t\to\infty} u(x) = u_A = 500$ што е логичкиот физички резултат.

Користена литература

[1] Kocaleva, M and Gicev, V (2014) *Примена на Crank-Nicolson методот за решавање на топлински равенки*. Yearbook 2013 - Faculty of Computer Science, 2 (2). pp. 35-45. ISSN 1857- 8691

[2] Chupa, M.A. *Numerical Techniques for Solving the One-Dimensional Heat Equation Numerical Analysis*, 2, 1998.

[3] Gicev, V. and Trifunac, M.D. (2006) *Non-linear earthquake waves in seven-storey reinforced concrete hotel*, NISEE, Pacific Earthquake Engineering (PEER) Center, Univ. of California, Berkeley.

[4] Ashton S. R. and F. Cheviakov, A (2012) *A Matlab-Based Finite Difference Solver for the Poisson Problem with Mixed Dirichlet-Neumann Boundary Conditions*.

[5] Baylis. A, Gunzburger, M., Turkel, E. (1980) *Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions*, Report No. 80-1, NASA-CR-153185.

[1] Толеранцијата претставува најмалата разлика помеѓу два последователни броја.